

# 円錐コイルばねの静的荷重下での応力および 変形に関する有限要素法解析

加藤泰世

## 1. はじめに

実用部材として使用されるコイルばねは、静的な荷重による変形量や回復力の他に、これらの動的な応答性、それにモード解析による固有振動数など様々な特性が要求される<sup>1) - 6)</sup>。実用的なコイルばねの例として円錐コイルばね、樽型コイルばねそれに鼓型コイルばねなどがあるが、これらは荷重-変位関係に現れる非線形性が有効に活用されている。また、共振による強い揺れを防ぐためにはピッチに変化を与えた不等ピッチばねなどが用いられることがある<sup>1) - 6)</sup>。

本研究は、有限要素法 (FEM) による三次元弾性解析によって、円錐コイルばねに静荷重を与えた時に生ずるせん断応力分布と変形に関する解析を、コイル径が一定となる円筒コイルばねの場合と合わせて行った結果を示したものである。なお、円錐コイルばねの特性として、変形時の接触のために荷重と変形量の関係に現れる非線形性が興味を持たれる点であり、ばねに関する特性評価としてモード解析も重要であると思われるが、筆者が知る限りにおいては円錐コイルばねを扱った有限要素法に関する報告はほとんどない。そこで、本研究では手始めとして円錐コイルばねの静的荷重下での特性について述べることにする。

## 2. 解析に用いたコイルばねのモデル、およびモデルの作成方法について

図 1 (a) は解析を行った円筒コイルばねのモデルであり、コイル径 ( $2R$ )、線径 ( $d$ )、ピッチ ( $p$ )、ピッチ角 ( $\alpha$ ) の定義と解析のための拘束断面と荷重負荷節点を示している。線径  $d$  は 4 mm とし、コイル半径  $R$  は 10mm, 20mm, 30mm の 3 通りとした。また、ピッチは 8 mm とし、コイル全体の巻き数は 4 とした。コイルばねの中央部に引張荷重を負荷させるためコイル最上部の断面に角柱を接合し、拘束断面は最下部の断面とした。また、同図 (b), (c) は異なる 2 方向から眺めたところである。図 2 は、解析用に作成した円錐コイルばねのモデルであり、異なる 3 方向から眺めたところを (a), (b), (c) の各図に示してある。図 1 (c), 図 2 (c) はどちらもほぼ真上から眺めたところであり、 $x$  軸と  $y$  軸が示してあるが、この図において手前に垂直の向きを  $z$  軸の正の向きとする。またこれらの図中に示すように  $x$ - $y$  平面においては  $r$ - $\theta$  による表記も用いており、円錐コイルばねのコイル半径  $R$  は、同図 (c) に示すように最上部の断面にて最小の  $R_1$  とし最下部の断面にて最大の  $R_2$  になるよう下記の (1) 式の  $r$ - $\theta$  関係に従うようなモデルとした。

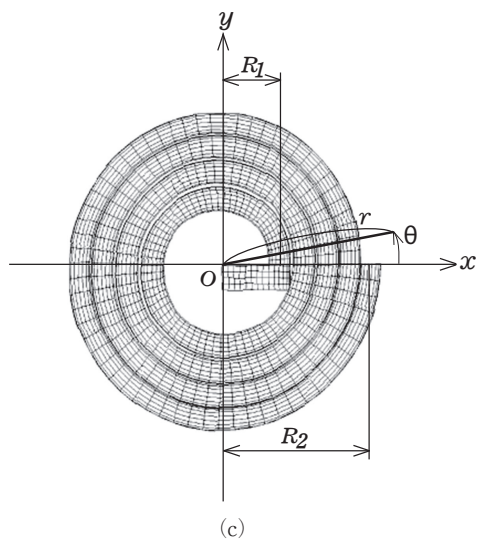
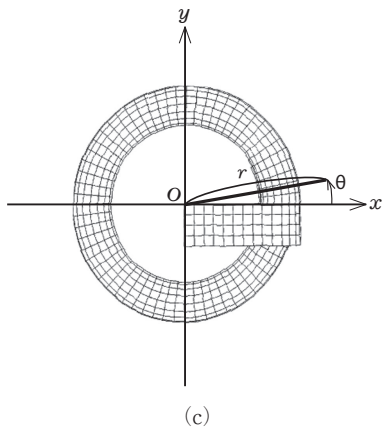
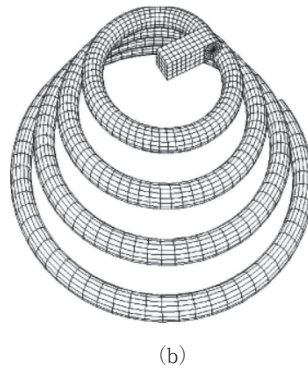
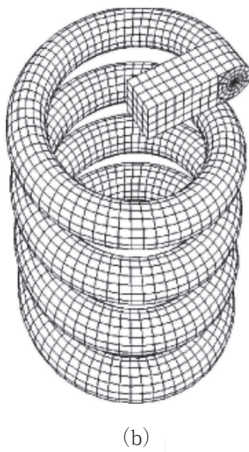
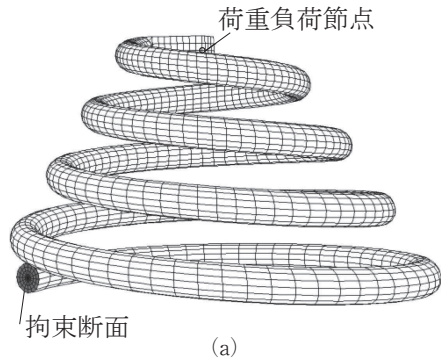
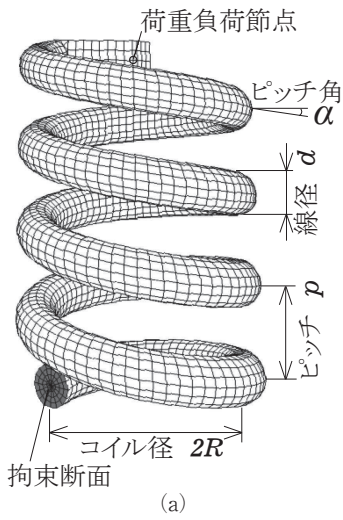


図1 円筒コイルばねの解析モデル

図2 円錐コイルばねの解析モデル

$$r = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\theta}{n_t \times 2\pi} \quad (1)$$

ただし、 $\theta$  は図 1 (c)、図 2 (c) に示すように  $z$  軸のまわりの回転角であり、 $n_t$  はコイル全体の巻き数で 4 とした。解析に用いたソフトは算生会<sup>7)</sup> が Web 上にシェアウェアとして公開しているソフトであり、モデル作成には

「SectData」と「SolidData」を使用し、解析には「FEM 3D」を使用した。

円筒コイルばねのモデル作成手順であるが、まず 2 次元解析のモデル作成用の「SectData」で図 3 (a) に示すような線材の円形断面の平面モデルを作成した。そして、3 次元解析のモデル作成用の「SolidData」を用いて、図 3 (a) に示した平面モデルを回転体の断面と見なして図 3 (b) に示すような円環の 1/4 に相当するモデルを作成した。すなわち、回転角度は  $90^\circ$  とした。そして、回転方向の分割数は 16 と設定した。ところで、コイルばねの場合は図 3 (c) のように回転角度に伴って  $z$  方向に傾ける必要があるので、図 3 (b) に示したモデルの状態から  $z$  軸の周りに  $5.625^\circ (=90^\circ / 16)$  ずつ回転させ、 $y$  座標が 0 となる節点の  $z$  座標の値を手入力によりピッチ  $p$  の  $1/64 (=1/4 \times 1/16)$  ずつ負の方向に変化させるよう補正を行い図 3 (c) に示すようなモデルを作成した。こうして作成された図 3 (c) に示すようなモデルを、 $z$  軸の周りに  $90^\circ$  回転させると同時に  $z$

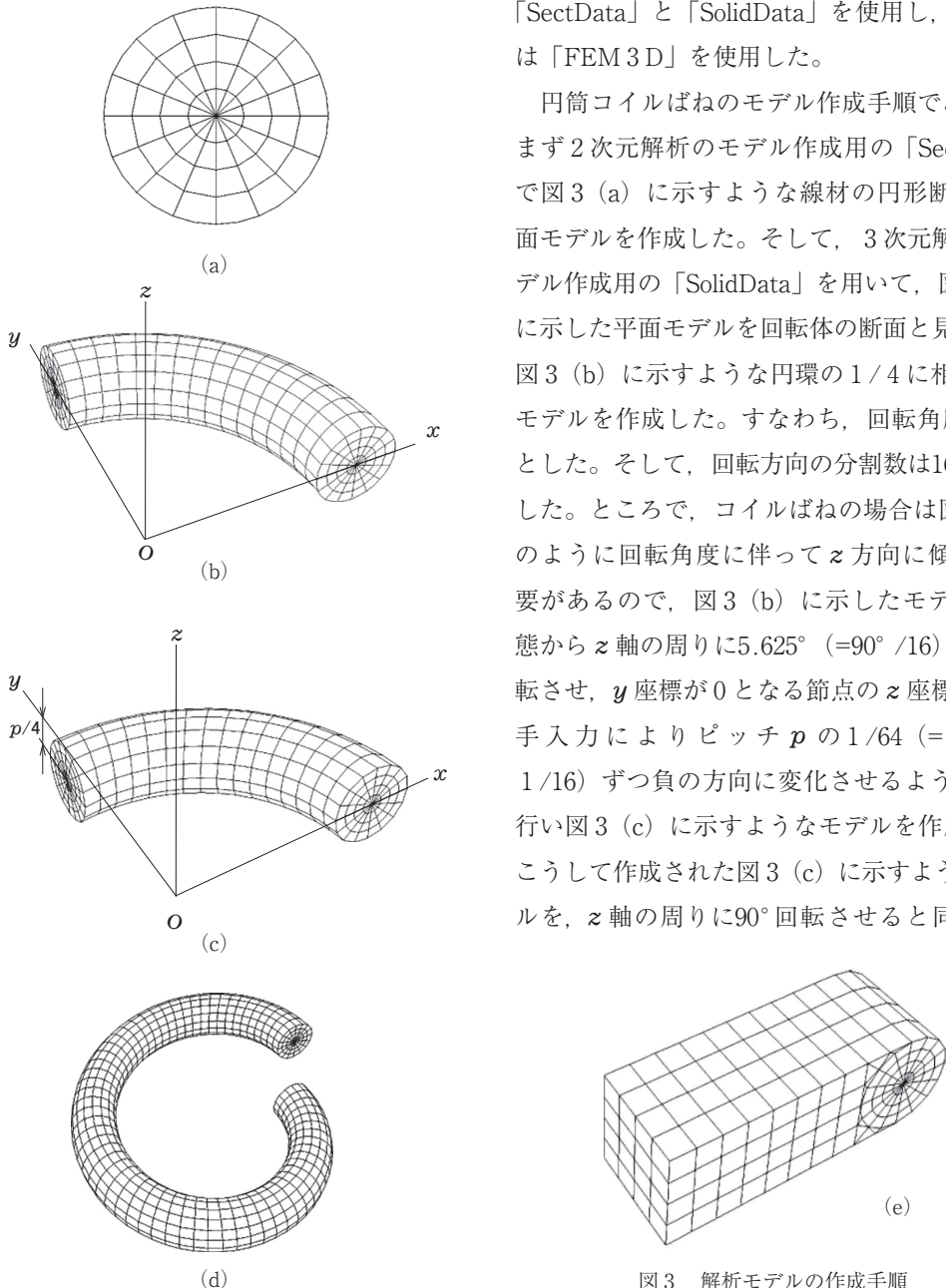


図 3 解析モデルの作成手順

方向にピッチ  $p$  の  $1/4$  だけ  $z$  方向に負の向きに移動させたモデルと合成し、この操作を繰り返すことによって図3 (d) に示すような1巻分のモデルを作成した。さらに、 $z$  方向にピッチ  $p$  だけ平行移動させたモデルと合成を繰り返し、最上部の断面に図3 (e) に示すようなモデルを合成し、図2の各図に示すような円筒コイルばねのモデルを作成した。

また、円錐コイルばねについては、図3 (b) に示したモデルの状態から手入力によって図3 (c) に示すようなモデルを作成する際に、 $z$  軸の周りに $5.625^\circ (=90^\circ / 16)$  ずつ回転させながらコイル半径の値が(1)式に従うように  $y$  座標が0となる節点の  $x$  座標も補正を行った。

なお、「SolidData」によって2次元解析用の平面モデルから3次元解析用の立体モデルを作成するにあたり、図3 (a) に示した円形モデルを柱状体の断面とみなして柱状体の断面の中心が円弧を描くように設定する方法もあるが、実際に解析を行ったところ上述の手法によって作成したモデルの方がより適切な結果が得られたので、上述の手法によるモデルの結果を示すこととした。

### 3. 円筒コイルばねのせん断応力分布、および変形解析結果

図4に示すのは図1の各図に示した円筒コイルばねのモデルで得られたせん断応力の解析結果である。図1 (a) に示した荷重負荷節点に正の  $z$  方向に10Nの荷重を負荷した。材料特性は縦弾性係数  $E=210000\text{MPa}$ 、またポアソン比  $\nu = 0.3$  とした。したがって、弾性係数間の関係<sup>8), 9)</sup> より、横弾性係数  $G$  は $80769\text{MPa}$ である。線材内部で生ずる模式的なせん断応力分布は同図上部に示してあり、コイルの巻き数  $n$  は拘束断面からの巻き数として定義した。

コイル半径  $R$  が10mm, 20mm, 30mmとした場合について巻き数  $n$  が1, 2, 3の断面での有限要素法によるせん断応力の解析結果を、それぞれ白抜き丸印、三角印、および四角印で区別し

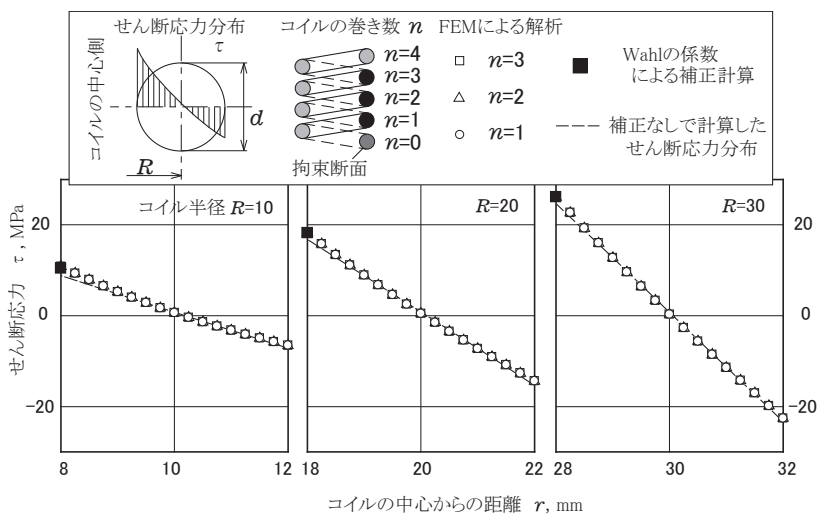


図4 円筒コイルばねのせん断応力解析結果

ているが、どのコイル半径  $R$  の結果についてもせん断応力分布は巻き数  $n$  による断面の位置に依存しない結果であるといえる。また、各図中に示した破線は、下記の式<sup>1) - 6), 8)</sup>に基づき計算されたせん断応力  $\tau$  の分布である。

$$\tau = \frac{32PR}{\pi d^4} r' + \frac{4P}{\pi d^2} \quad (2)$$

(2) 式の第1項は、ねじりモーメント  $PR$  ( $P$  は荷重負荷節点に与えた荷重) によるねじり応力であり、 $PR$  を直径  $d$  の円形断面の極断面二次モーメントで除し、円の中心から半径方向の距離  $r'$  を乗ずれば導くことができる。また、(2) 式の第2項は、荷重  $P$  によるせん断応力であり、荷重  $P$  を直径  $d$  の円の面積で除すれば導くことができる。どのコイル半径の結果についても (2) 式を用いた計算結果と有限要素

法解析で得られた結果との間に良い対応関係が認められるが、各断面でせん断応力が最大値をとるコイル中心側では、有限要素法による解析結果は (2) 式の計算結果より幾分高め値となる。そこで、各断面でコイルの中心側の最大せん断応力を下記の Wahl の手法<sup>1) - 6), 8)</sup>に基づき補正計算を行った。その結果は各図中に黒塗りの四角印で示すが、有限要素法解析で得られた結果とほぼ一致しているといえる。

$$\tau_{max} = K \frac{16PR}{\pi d^3}, K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C}, c = \frac{2R}{D} \quad (3)$$

なお、(2), (3) 式にてせん断応力の計算をするにあたりコイルの巻き数  $n$  はパラメーターとして含まれていないが、上述のように図4に示したどのコイル半径の場合も巻き数  $n$  依存性は認められない。

次に、図5に示すのは、図1の各図に示した円筒コイルばねのモデルで得られた変形解析の結果であり、有限要素法で得られたコイルの巻き数  $n$  と変位  $\delta$  の関係を示したものである。ここでの解析条件は、先に示したせん断応力分の解析と同様であり、図中の記号はコイル半径  $R$  の区別を意味している。また、図中の破線は下記の (4) 式<sup>1) - 6), 8)</sup>に基づく結果であり、どのコイル半径に対する結果も有限要素法で得られた結果とほぼ一致している。

$$\delta = \frac{64nPR^3}{Gd^4} \quad (4)$$

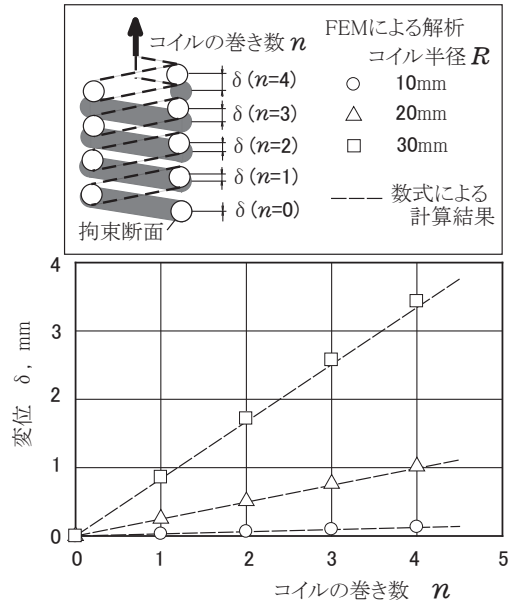


図5 円筒コイルばねの変位解析結果

4. 円錐コイルばねのせん断応力分布, および変形解析結果

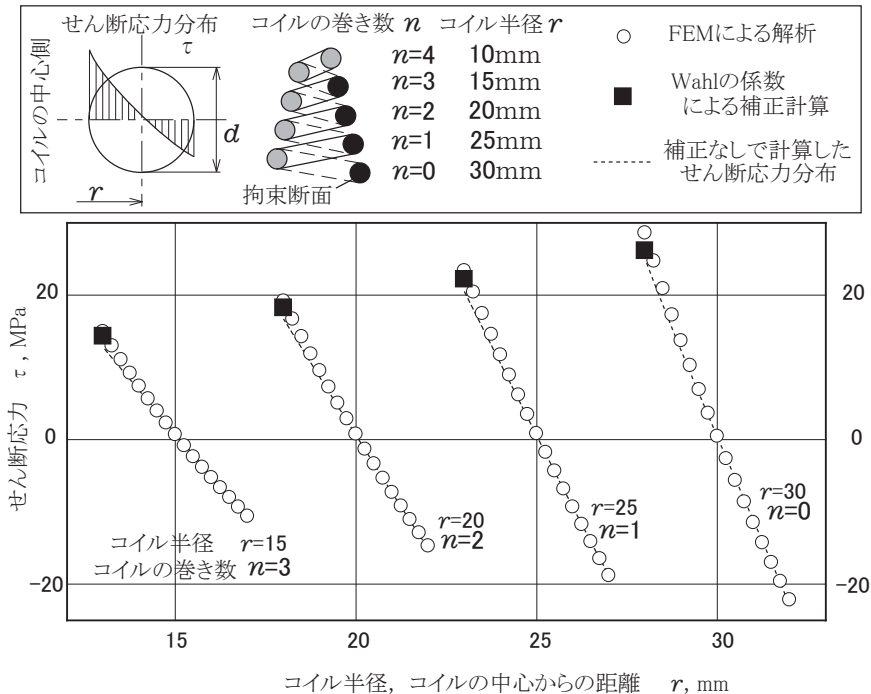


図6 円錐コイルばねのせん断応力解析結果

図6に示すのは図2の各図に示した円錐コイルばねのモデルで得られたせん断応力の解析結果である。解析条件は先に示した円筒コイルばねの場合とほぼ同様であり、図2に示した荷重荷節点には正の $z$ 方向に10Nの荷重を負荷した。材料特性についても、先に示した円筒コイルばねと同様に縦弾性係数 $E=210000\text{MPa}$ 、またポアソン比 $\nu=0.3$ としたので、横弾性係数 $G$ は $80769\text{MPa}$ である<sup>8), 9)</sup>。ここでも線材内部で生ずる模式的なせん断応力分布は図の上部に示してあり、コイルの巻き数 $n$ は拘束断面からの巻き数として定義し、巻き数 $n$ を示したところの断面のコイル半径 $r$ も合わせて図中に示してある。どのコイル半径 $r$ に対する結果も、白抜き丸印は有限要素法による解析結果であり、破線は式(2)によって計算した結果である。計算を行う際のコイル半径は、せん断応力を計算した断面での値を用いている。また、黒塗りの四角印は、各断面でのコイルの中心側のせん断応力を、式(3)に示したWahlの手法<sup>1) - 6), 8)</sup>に基づき補正計算を行った結果であるが、どのコイル半径 $r$ に対する結果も、コイルの中心側で白抜き丸印、破線それに黒塗り四角印の結果に幾分差異がみられ、コイル半径 $r$ が大きくなるほどその傾向がやや顕著になる傾向にあるが、Wahlの手法<sup>1) - 6), 8)</sup>に基づく計算と有限要素法による計算結果の差異は最大でも10%程度であり特に著しいとは考えられない。



また、図7に示すのは、図2の各図に示した円錐コイルばねのモデルで得られた変形解析の結果であり、有限要素法で得られた巻き数  $n$  と変位  $\delta$  の関係を示したものである。ここでの解析条件も、先に示したせん断応力分の解析と同様である。図中の破線は(5)式<sup>1)-6), 8)</sup>に基づく結果であり、有限要素法で得られた結果とほぼ一致しているが、円筒コイルばねのようにコイル半径が一定ではないので、巻き数  $n$  と変位  $\delta$  の関係に非線形性が認められる。

$$\delta = \frac{16Pn}{Gd^4} (R_2^2 + r^2)(R_2 + r) \quad (5)$$

なお、(5)式の中の  $r$  は、図1(c)、図2(c)に示した  $\theta$  をパラメーターとする関数であり、(1)式にて  $n_t = 4$  とした場合に、

$r = R_2$  となる  $\theta = 8\pi$  から  $r = R_1$  となる  $\theta = 0$  まで  $\theta$  を減少させるように変化させた。したがって、(5)式の中の巻き数  $n$  は  $(8\pi - \theta) / 2\pi$  で算出できる。

## 5. おわりに

本研究では、有限要素法による円錐コイルばねに静荷重を与えた時に生ずるせん断応力と変形解析を、円筒コイルばねの場合と合わせて行った。本文中に示したせん断応力と変形に関する計算式の詳細な導出手順の記述は省略しているが、導出にあたり円錐コイルばねの場合と円筒コイルばねの場合で異なる点は、コイル半径を変化させるか一定とするかの違いである。本文中に示した解析結果からも、こうした計算式に反映される傾向が認められたといえる。

なお、一部の結果については、有限要素法による解析結果と計算結果の間に、誤差範囲といえるものの幾分差異が認められた。この理由として、ここでの解析は図1(a)に示したピッチ角  $\alpha$  を0とみなした密巻コイルばねと仮定したことが考えられる。そこで、ピッチ角  $\alpha$  を考慮した粗巻コイルばねの計算式<sup>9)</sup>を用いてみたが、本文中に示した結果とほとんど変わらない結果となった。また、ピッチ角  $\alpha$  が0でなければ線材の断面形状は楕円となるので、ねじり応力を計算する際の極断面二次モーメントを楕円の場合として計算を行ってみたが、この場合も本文中に示した結果とほとんど差異は認められなかった。そこで、計算精度に関するより詳細な検討、また冒頭に記した動的解析やモード解析それに接触を含めた変形解析については今後の検討課題としたい。

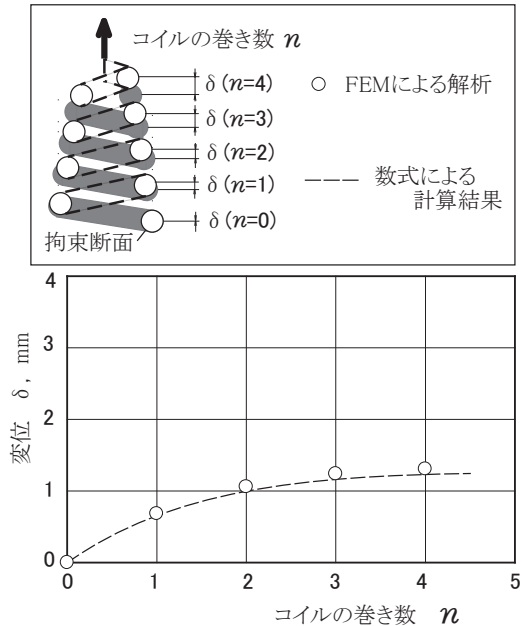


図7 円錐コイルばねの変位解析結果

### 参 考 文 献

- 1) ばね技術研究会, ばねの設計, 丸善, (1963)
- 2) ばね技術研究会, ばね, 丸善, (1970)
- 3) 小玉正雄, ばねのおはなし, 日本規格協会, (1985)
- 4) 小玉正雄 他, JIS ばね使用と設計のポイント, 日本規格協会, (1989)
- 5) 機械要素, ばね, ニッパツ・日本発条株式会社, (株)工業調査会, (1995)
- 6) 康井義明, 永井孝夫, 田中健朗, 自動車用エンジン弁ばねの動的強度に関する特性, 東海大学紀要工学部, 43 29-34, (2003)
- 7) 黒田英男, 基礎からの数値解析—初歩から「有限要素法」による解析まで, 工学社, (2010)  
<http://homepage2.nifty.com/sanseikai/>
- 8) 村上敬宜, 材料力学, 森北出版, (1994)
- 9) 平修二, 現代材料力学, オーム社, (1981)