

倒立振子の研究—システム制御教育実験として

宮部道夫・阿知波重春

1 はじめに

自動車技術は走行安定性の向上, 排出ガス抑制など社会ニーズの高い分野を中心に車内快適性増進に至るまで大きなシステムを統合する制御技術が不可欠となり, 自動車の技術のうち主座を占めている。この制御技術の解析手段は Laplace 変換主体の 1 入出力システムから, 行列論を基礎とした多入出力システムに移り, システム内部の状態が一層判り易くなった。

この場合, 限られた時間内の講義でこうした理論を説明するには, 行列による簡潔な表現で形態的に理解し易い面があるが, 反面抽象的になるため基礎を欠くと実態把握が困難になることがある。この欠点を補うよう, 現代システム制御を視覚的にも把握し理解を容易にするため, 不安定系の好適例として代表的な倒立振子をデジタルシミュレーションで解析し, 実機を用いてコンピュータにより実際の制御パラメータ, 制御方針を入力して制御状態を目視できるよう試みた。これにより状態フィードバックの各種の制御方針に従って制御パラメータが決定され, それによる制御状態の違いがシミュレーション上及び目視で体感でき, 理論理解の大きな助けになる。この不安定系を制御する方法は極配置法及び最適レギュレータの 2 法による状態フィードバックとし, その制御理論と実際の制御の関係を調べる。

2 倒立振子の安定制御

2. 1 倒立振子システムの数学モデル

図において記号を次のように定める。

a : 駆動モータ入力電圧 u に対して台車に働く水平力 f のゲイン常数

b : 台車及び駆動系の等価粘性摩擦係数

c : 振子回転軸の等価粘性摩擦係数

f : 台車の駆動力

J : 振子の重心 G 回り慣性モーメント

L : 振子の重心からその端までの距離 (振子長さを $2L$ とする)

M : 台車及び駆動系統の等価質量

m : 振子の質量

- u : 駆動モータへの入力電圧
- x : 台車の変位
- θ : 鉛直方向からの振り偏れ角

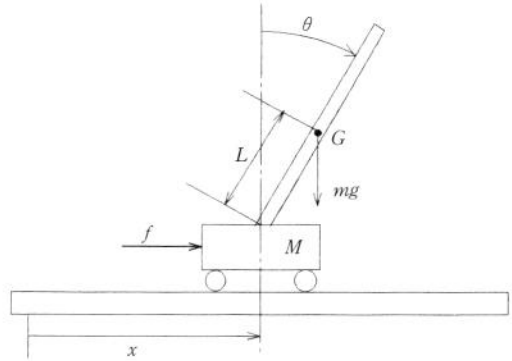


図 2.1-1

図 2.1-1 について運動方程式を作る。運動エネルギーを T 、ポテンシャルエネルギーを U とすれば

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m \left\{ \frac{d}{dt}(x + L \sin\theta) \right\}^2 + \frac{1}{2}m \left\{ \frac{d}{dt}(L \cos\theta) \right\}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (2.1.1)$$

$$U = mgL \cos\theta \quad (2.1.2)$$

摩擦項を無視すれば Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = f \quad (2.1.4)$$

となり、これに (2.1.1), (2.1.2) を代入すると

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} + mL \cos\theta \cdot \dot{x} - mgL \sin\theta = 0 \quad (2.1.5)$$

$$(M + m)\ddot{x} + mL \cos\theta \cdot \ddot{\theta} - mL \sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 = f \quad (2.1.6)$$

ここに定義により

$$f = au \quad (2.1.7)$$

(2.1.5), (2.1.6) に粘性摩擦項を付加し, $\theta \ll 1$ として線形近似すれば,

$$mL\ddot{x} + (J + mL^2)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgL\theta = 0 \quad (2.1.8)$$

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + b\dot{x} = au \quad (2.1.9)$$

これより

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \left\{ \begin{pmatrix} -m^2L^2g & -(J + mL^2)b & mLc \\ (M + m)mgL & mLb & -(M + m)c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (J + mL^2)a \\ -mLa \end{pmatrix} u \right\}$$

ここに W は次式の値とする。 (2.1.10)

$$W = (M + m)J + mML^2 > 0 \quad (2.1.11)$$

状態ベクトル \mathbf{x} を次式のように取って (2.1.10) を書き表せば,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} u \quad (2.1.12)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{m^2 L^2 g}{W}, & a_2 &= -\frac{(J + mL^2) b}{W}, & a_3 &= \frac{mLc}{W}, & a_4 &= \frac{(M + m) mgL}{W}, \\ a_5 &= \frac{mLb}{W}, & a_6 &= -\frac{(M + m) c}{W}, & b_3 &= \frac{(J + mL^2) a}{W}, & b_4 &= -\frac{mLa}{W} \end{aligned} \right\} (2.1.13)$$

出力ベクトル \mathbf{y} は, $\mathbf{y}^T = (x, \theta)^T$ とすれば

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.1.14)$$

となる。

このシステムを

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.1.16)$$

と表現すれば

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.17)$$

である。

2. 2 可制御性と可観測性

システムの見通しを良くするため, 粘性抵抗の無い場合について調べる。

2. 2. 1 可制御性

$$\mathbf{U}_c = (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}) \quad (2.2.1)$$

の rank を見る。

$$|\mathbf{U}_c| = \begin{vmatrix} 0 & b_3 & 0 & a_1 b_4 \\ 0 & b_4 & 0 & a_4 b_4 \\ b_3 & 0 & a_1 b_4 & 0 \\ b_4 & 0 & a_4 b_4 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 a_4 b_4^2 (a_1 b_4 - a_4 b_3)^2 \quad (2.2.2)$$

従って可制御の条件は

$$P = a_1 b_4 - a_4 b_3 \neq 0 \quad (2.2.3)$$

である。(2.1.13) により

$$P = -\frac{m^2 L^2 g}{W} \cdot -\frac{mLa}{W} - \frac{(M + m) mgL}{W} \cdot \frac{(J + mL^2) a}{W} = -\frac{mLga}{W} < 0 \quad (2.2.4)$$

よって (2.2.3) は満たされ, 可制御である。これは (2.1.10) の表現が可能となる要件である。

2. 2. 2 可観測性

$$\mathbf{U}_o = (\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{C}^T) \quad (2.2.5)$$

の rank を見る。

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 & a_4 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

rank $U_0=4$ は明らかだから、可観測である。

2. 3 極配置法による状態フィードバック行列の決定

2. 3. 1 粘性抵抗のない場合

システムの見通しを良くするため粘性摩擦項を除いて考える。特性根を求めるには

$a_2=a_3=a_5=a_6=0$ として

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -a_1 & s & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 & s \end{vmatrix} = s^2(s - \sqrt{a_4})(s + \sqrt{a_4}) = 0, \quad a_4 > 0 \quad (2.3.1)$$

したがって特性根 r_i は

$$r_1=0, \quad r_2=0, \quad r_3=\sqrt{a_4}>0, \quad r_4=-\sqrt{a_4} \quad (2.3.2)$$

となり、 r_3 は不安定根である。

2. 3. 2 特性根指定による状態フィードバック係数 K

(2.1.15)において状態フィードバックを

$$u = -Kx \quad (2.3.3)$$

$$K = (k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (2.3.4)$$

とする。この場合(2.1.15)は

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.3.5)$$

特性根は

$$|sI - A + BK| = 0 \quad (2.3.6)$$

の根であって、これを $\lambda_1, \lambda_2 (= \bar{\lambda}_1), \lambda_3, \lambda_4 (= \bar{\lambda}_3)$ と指定する。当然 $R(\lambda_i) < 0, i=1, \dots, 4$ である。

$\lambda_i = r_i + b_j$ と記す。

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -a_1 & s & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} (k_1, k_2, k_3, k_4) \right| = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) \quad (2.3.7)$$

$$= (s - r_1 - b_{1j})(s - r_1 + b_{1j})(s - r_2 + b_{2j})(s - r_2 - b_{2j}) \quad (2.3.8)$$

$$= s^4 - \Lambda_3 s^3 + \Lambda_2 s^2 - \Lambda_1 s + \Lambda_0 = 0 \quad (2.3.9)$$

と等値する。

ここで

$$\Lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2(r_1 + r_2) < 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 = r_1^2 + b_1^2 + r_2^2 + b_2^2 + 4r_1 r_2 > 0 \\ \Lambda_1 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 2\{r_2(r_1^2 + b_1^2) + r_1(r_2^2 + b_2^2)\} < 0 \\ \Lambda_0 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = (r_1^2 + b_1^2)(r_2^2 + b_2^2) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

このとき \mathbf{K} は (2.3.10) を用いて下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\Lambda_0}{P} < 0 \\ k_2 &= \frac{a_4 + \Lambda_2 - b_3 k_1}{b_4} = \frac{1}{b_4} (a_4 + \Lambda_2 - b_3 \frac{\Lambda_0}{P}) < 0 \\ k_3 &= \frac{-\Lambda_1}{P} < 0 \\ k_4 &= -\frac{\Lambda_3 + b_3 k_3}{b_4} = -\frac{1}{b_4} (\Lambda_3 - b_3 \frac{\Lambda_1}{P}) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.11)$$

このように、不安定系 (2.1.12) を制御するために、状態フィードバックは正フィードバックとなり、極配置を原点から左方遠くに開いて減衰、固有振動数を上げるほど、状態フィードバックの量は正で大きくなる。

2.3.3 粘性抵抗のある場合

(1) 直接法

システム (2.1.12) と状態フィードバック (2.3.3), (2.3.4) により \mathbf{K} が定まる。特性方程式は

$$\left| \begin{pmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ 0 & -a_1 & s-a_2 & -a_3 \\ 0 & -a_4 & -a_5 & s-a_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} (k_1, k_2, k_3, k_4) \right| = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)(s-\lambda_4) = 0 \quad (2.3.12)$$

となる。これより \mathbf{K} について

$$b_3 k_3 + b_4 k_4 = a_2 + a_6 - \Lambda_3 \quad (2.3.13)$$

$$b_3 k_1 + k_4 k_2 + (-a_6 b_3 + a_3 b_4) k_3 + (-a_2 b_4 + a_5 b_3) k_4 = -a_2 a_6 + a_3 a_5 + a_4 + \Lambda_2 \quad (2.3.14)$$

$$(-a_6 b_3 + a_3 b_4) k_1 - (-a_5 b_3 + a_2 b_4) k_2 - (-a_1 b_4 + a_4 b_3) k_3 = a_1 a_5 - a_2 a_4 - \Lambda_1 \quad (2.3.15)$$

$$(-a_4 b_3 + a_1 b_4) k_1 = \Lambda_0 \quad (2.3.16)$$

の1次方程式を得るのでこれを解いて \mathbf{K} が得られる。

(2) 可制御標準形からの方法

システムが大きくなると、可制御標準形から状態フィードバックを求めるのが便利である。1入力システムの場合、システム (2.1.15) において

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (2.3.17)$$

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) = s^4 - \Lambda_3 s^3 + \Lambda_2 s^2 - \Lambda_1 s + \Lambda_0 \quad (2.3.18)$$

ここに

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -a_1 a_5 + a_2 a_4, \quad \alpha_2 = a_2 a_6 - a_3 a_5 - a_4, \quad \alpha_3 = -a_2 - a_6 \quad (2.3.19)$$

である。変換行列 T を用いて状態変数を x から Z に変える。即ち

$$T = U_c V \quad (2.3.20)$$

$$X = TZ \quad (2.3.21)$$

ここで

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

と取る。このとき

$$T = \begin{pmatrix} b_3 \alpha_2 + a_1 b_4 & b_3 \alpha_3 & b_3 & 0 \\ b_4 \alpha_2 + a_4 b_4 & b_4 \alpha_3 & b_4 & 0 \\ b_3 \alpha_1 + a_1 b_4 \alpha_3 & b_3 \alpha_2 + a_1 b_4 & b_3 \alpha_3 & b_3 \\ b_4 \alpha_1 + a_4 b_4 \alpha_3 & b_4 \alpha_2 + a_4 b_4 & b_4 \alpha_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

この変換により、次の可制御標準形を得る。

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.3.24)$$

これより状態フィードバック係数 K は

$$K = [\Lambda_0 - \alpha_0, -\Lambda_1 - \alpha_1, \Lambda_2 - \alpha_2, -\Lambda_3 - \alpha_3] T^{-1} \quad (2.3.25)$$

と求まる。

2. 4 最適レギュレータ法による状態フィードバック行列の決定

制御誤差と制御エネルギーをそれぞれに重み行列を付けて時間積分する評価関数が、最小になるように制御する最適レギュレータを考える。

(1) 最適レギュレータ

評価関数 J を次のように決める。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2.4.1)$$

ここに重み行列 $Q \geq 0$, $R > 0$ は何れも対称行列である。このとき J を最小にする最適フィードバック制御入力 U^0 は

$$U^0 = -Kx \quad (2.4.2)$$

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.4.3)$$

で与えられる。ここに P は対称行列で次の Riccati 方程式の唯一の正定値解を取る。

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (2.4.4)$$

(2) Riccati 方程式

(2.4.4) は (2.1.17) により次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_4 \\ 1 & 0 & a_2 & a_5 \\ 0 & 1 & a_3 & a_6 \end{pmatrix} P + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} + Q - P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} R^{-1} (0, 0, b_3, b_4) P = 0 \quad (2.4.5)$$

ここで Q, R を制御目的に合うよう選び、 P に関する非線形行列方程式を解いて (2.4.4) より状態フィードバック係数 K を求める。

2.5 1型サーボ系

このシステムにおいて振子を垂直に立てる他に、例えば台車の位置も制御しステップ状の位置入力にして定常偏差が残らないように制御する場合を考える。一巡伝達関数は 1 型でなければならないが、システムに積分器は無いため、入力信号とプラントの間に積分器と増幅器を設ける。

即ちこの制御は

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.5.2)$$

$$\mathbf{C} = (1, 0, 0, 0) \quad (2.5.3)$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_I \xi \quad (2.5.4)$$

$$\dot{\xi} = v - y = v - \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.5.5)$$

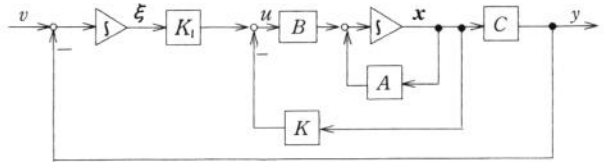


図 2.5-1

と表され図 2.5-1 のようになる。

この場合、システム次数 n 、出力ベクトル次元 l として

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} = n + l = 4 + 1 = 5 \quad (2.5.6)$$

が必要十分条件となる。

(2.5.1) と (2.5.5) を統合して

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.7)$$

$$\mathbf{x}_{e(t)} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \quad (2.5.8)$$

$$\xi_{e(t)} = \xi(t) - \xi(\infty) \quad (2.5.9)$$

$$u_{e(t)} = u(t) - u(\infty) \quad (2.5.10)$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{e(t)} \\ \xi_{e(t)} \end{pmatrix} \quad (2.5.11)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \ \vdots \ -K_I] \quad (2.5.12)$$

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \quad (2.5.13)$$

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.14)$$

と定義する。これにより、このシステムの制御誤差方程式は

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (2.5.15)$$

を得る。

極配置を $\phi_1, \phi_2 (= \overline{\phi_1}), \phi_3, \phi_4 (= \overline{\phi_3}), \phi_5 (\in R)$ とし、 \hat{A} の特性多項式の各係数を γ_i 、希望極による特性多項式の各係数を $\Phi_i, i=0 \sim 4$ として下のように等置する。

$$|sI - \hat{A}| = \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -a_1 & s-a_2 & -a_3 & 0 \\ 0 & -a_4 & -a_5 & s-a_6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^5 + \gamma_4 s^4 + \gamma_3 s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0 \quad (2.5.16)$$

$$(s - \gamma_1)(s - \gamma_2)(s - \gamma_3)(s - \gamma_4)(s - \gamma_5) = s^5 - \Phi_4 s^4 + \Phi_3 s^3 - \Phi_2 s^2 + \Phi_1 s - \Phi_0 \quad (2.5.17)$$

ここで A の特性多項式の各係数 α_i とは次の関数がある。

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_i = \alpha_{i-1}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.5.18)$$

変換行列 T は

$$T = U_c V \quad (2.5.19)$$

$$U_c = (\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \hat{A}^2\hat{B}, \hat{A}^3\hat{B}, \hat{A}^4\hat{B}) \quad (2.5.20)$$

$$V = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 1 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.21)$$

これより状態フィードバック係数 \hat{K} は

$$\hat{K} = [-\Phi_0 - \gamma_0, \Phi_1 - \gamma_1, -\Phi_2 - \gamma_2, \Phi_3 - \gamma_3, -\Phi_4 - \gamma_4] T^{-1} \quad (2.5.22)$$

$$= (k_1, k_2, k_3, k_4, -K_1) \quad (2.5.23)$$

として定まる。

簡単のため粘性摩擦項を省くと、(2.5.19) の変換行列 T は (2.2.3) の P を用いて

$$T = \begin{pmatrix} 0 & P & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.24)$$

として求まる。

3 シミュレーションと実験

3.1 極配置法のシミュレーション

振子の実際系に近いシステムパラメータを用いて極の配置を種々変えその出力の変化を観察し

てみる。

3. 1. 1 極の配置

シミュレーションを行った極の配置を表 3. 1-1 に示す。

表 3. 1-1

極	図3.1-1	図3.1-2	図3.1-3	図3.1-4	図3.1-5	図3.1-6	図3.1-7
λ_1, λ_2	$-6 \pm 10j$	$-2 \pm 8j$	$-2 \pm 10j$	$-2 \pm 12j$	$-2 \pm 8j$	$-2 \pm 12j$	$-2.47 \pm 7.87j$
λ_3, λ_4	$-8 \pm 10j$	$-5 \pm 8j$	$-5 \pm 10j$	$-5 \pm 12j$	$-5 \pm 12j$	$-5 \pm 8j$	$-4.95 \pm 15.7j$

初期値は全て $(x_0, \theta_0, \dot{x}_0, \dot{\theta}_0)^T = (0, 0.2, 0, 0)^T$ とした。

3. 1. 2 極の配置の特徴

図 3. 1-2 では減衰が良く効いて早く収束するが、これより虚部の値を高めていった図 3. 1-3, 図 3. 1-4 になると、変動の周波数が高くなり応答が早くなる。

他方このため状態フィードバック係数 K の値が大きくなり、必要な制御力が大きくなるがこれ

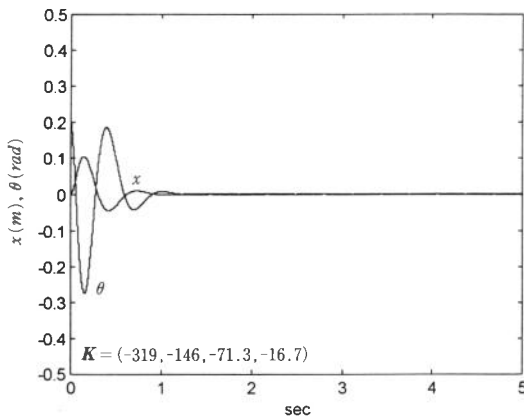


図 3. 1-1

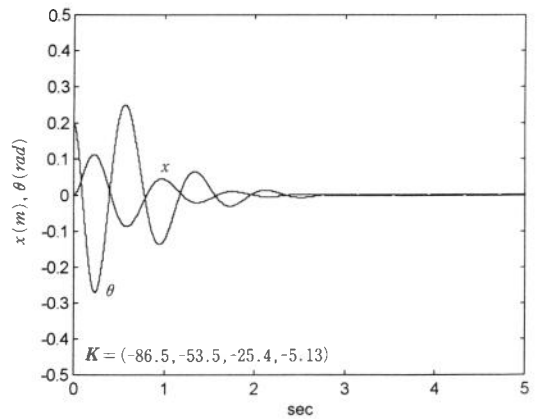


図 3. 1-2

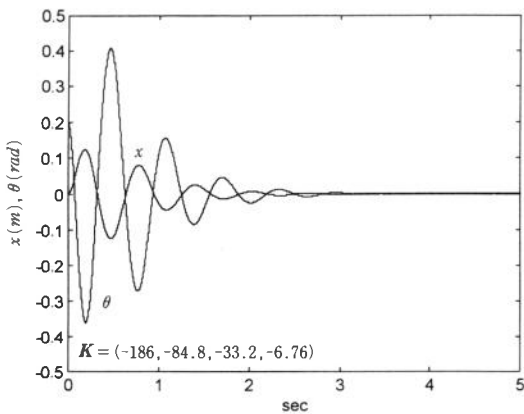


図 3. 1-3

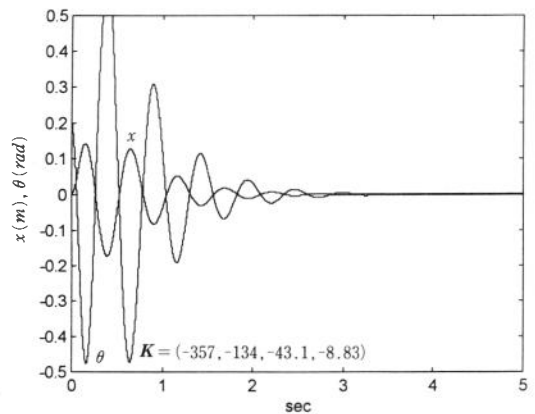


図 3. 1-4

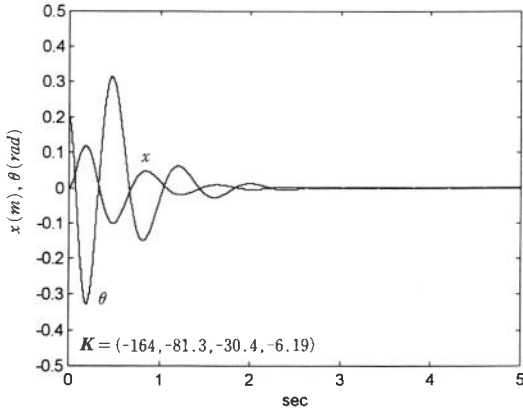


図 3.1-5

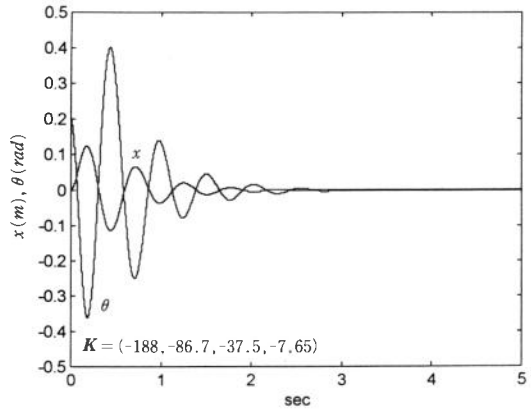


図 3.1-6

に対応して振幅が大きくなる。

このように固有振動数に影響する虚部の値を大きくしていくと速応性を上げるため状態フィードバック係数は必然的に大きくせねばならず、これに応じて出力の振幅即ち振子の振れ、台車の振幅も大きくなる。したがってこの場合収束に時間が掛ることが認められる。

また図 3.1-3 から図 3.1-1 のように虚部一定のままにして実部の絶対値を上げていくと、減衰は強くなり、出力は急速に収束に向かう。システムの設計に際しては、そのシステム

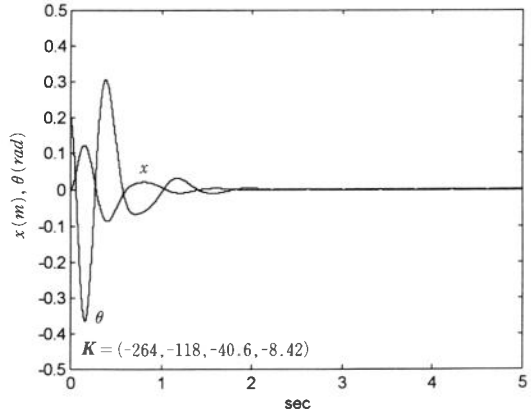


図 3.1-7

の速応性と収束の特性を把握して、制御目的に合った極を設定せねばならない。

図 3.1-5 と図 3.1-6 を比較すると、後者では 1 組の共役根の持つ減衰特性が弱いため、解の収束は遅くなる。

次に指定する両共役根を持つ、自由系における減衰を 30% にしたときの結果を図 3.1-7 に示す。他の例よりも減衰が強いので、急速に収束することが分かる。

3. 2 最適レギュレータによるシミュレーション

線形系における最適レギュレータを構成して、評価の重み付けを種々変えた場合を考察する。図 3.2-1 は状態フィードバック $K=0$ の場合を示す。当然のことながら不安定系であるから、初期傾角が零でない限り、振子はすぐ倒れていく。シミュレーションの条件を表 3.2-1 に示す。

表 3.2-1

Q (対角要素) \ R	0.003	0.01
1000,1,1,0.1	図3.2-6	
100,1,1,0.1	図3.2-2	図3.2-3
1,100,1,0.1	図3.2-4	図3.2-5

1) R の影響

R , 即ち制御に要するエネルギーの評価を厳しくしてゆくと, (図 3.2-2 → 図 3.2-3, 図 3.2-4 → 図 3.2-5) 状態フィードバック係数 K は下がり, 制御に要するエネルギーが減少してゆくが, 図からは台車位置, 振り傾角の出力波形に大きな差は見られない。

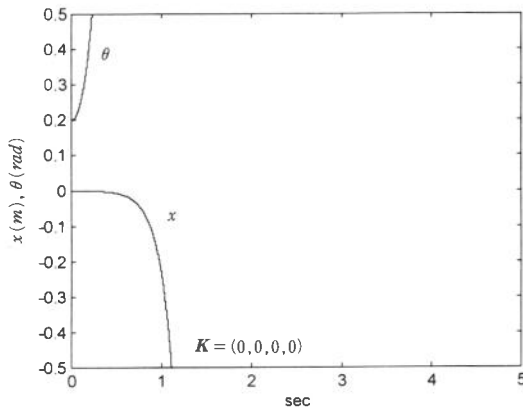


図 3.2-1

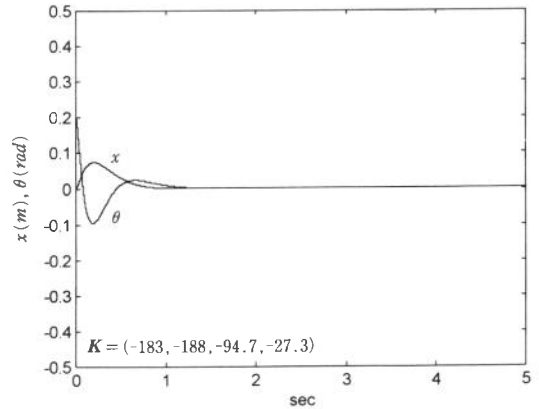


図 3.2-2

2) Q の影響

振り傾角を重視して, これに相対的加重を付けた場合が図 3.2-4, 図 3.2-5 であるがこれを各々図 3.2-2, 図 3.2-3 から比較すると台車の位置 x : 振子の傾角 θ が 100:1 から 1:

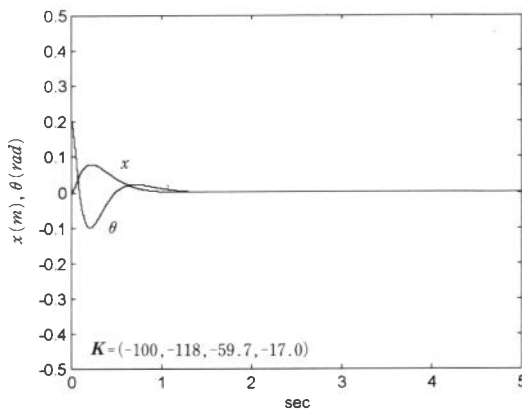


図 3.2-3

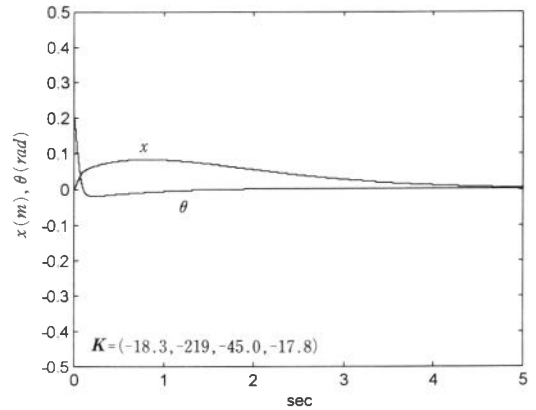


図 3.2-4

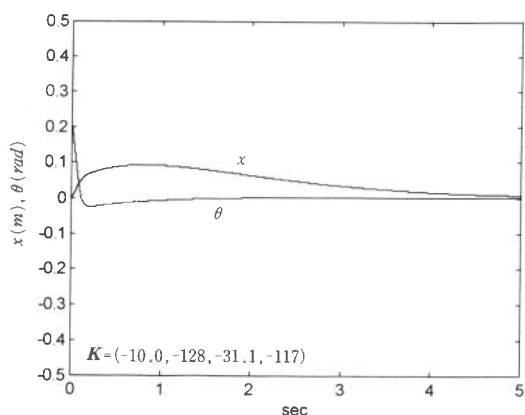


図 3.2-5

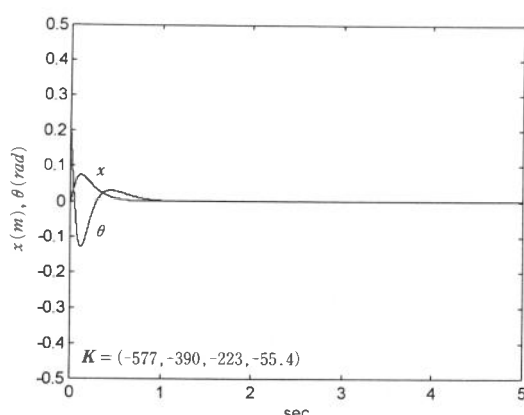


図 3.2-6

100に変えているため、振子角度変化は厳しく制御されて小さく、早く零に収束している。しかし台車の位置 x は相対的に軽く見ているため、収束に要する時間が1秒以内から5秒程度へと遅くなっていることが判る。

状態フィードバック係数 K の内 x 、 θ に各々掛かる k_1 、 k_2 について見ると、 $x : \theta = 100 : 1$ の場合はかなり大きく、逆に $1 : 100$ に取ると k_1 は大きく下がり、 x の収束は悪い。 k_2 は k_1 ほど敏感ではないが増加を示し、このフィードバック係数で θ の早期収束が達成されている。

Q の性質をさらに調べるため、図 3.2-6 では $x : \theta = 1000 : 1$ に取った。これと $x : \theta = 100 : 1$ の図 3.2-2 と比較すると x に極端な重み付けをした場合、急激な入力により θ に一過性の大きな振幅を許す代わりに x につれて θ も早期に収束するよう制御が働くことが判る。

3.3 1型サーボ系のシミュレーション

台車の位置 x も制御する場合を考慮する。この場合 x の目標値としてステップ入力を与え、これに対する x 、 θ のインディシャル応答を見る。図 3.3-1 にその結果を示す。平衡静止の状態から $x=1.0$ を目標値として与えた瞬間、台車は僅かに後退して振子を前傾させ、これを直立に補正するよう台車は前進して $x=1.0$ を達成することが判る。

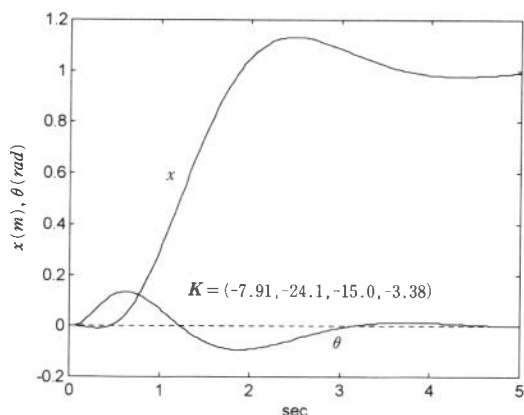


図 3.3-1

3. 4 実システムによる実験

1) 実験システム

実験システムの仕様は表3.4-1に、また外観は写真3.4-1に示す。このシステムでは状態フィードバック係数をコンピュータから増幅器を介してコントローラに入力する。台車位置、振子の傾角は各々ロータリエンコーダで電気信号に変えられてコンピュータに入力される。また台車はDCモータによってベルトを介して駆動させる。

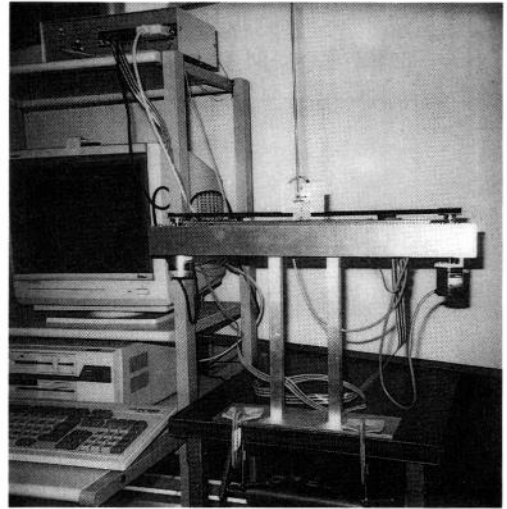


写真3.4-1

表3.4-1

a	駆動力/電圧変換係数	0.98 N/V
b	台車系の等価摩擦係数	9.80 kg/s
c	軸の等価粘性摩擦係数	$3.58 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2/\text{s}$
J	振子の重心回りのモーメント	$4.71 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
L	軸から振子の重心までの距離	0.125 m
M	台車系の等価質量	0.64 kg
m	振子の質量	0.045 kg

2) 極配置の実験例

実験例の一部を表3.4-2に掲げる。

表3.4-2

	図3.4-2	図3.4-3
極	$-6 \pm 5 j$	$-8 \pm 10 j$
	$-8 \pm 5 j$	$-10 \pm 8 j$

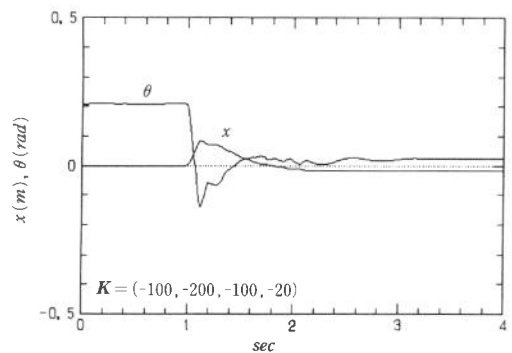


図3.4-1

実験は初期ベクトルを $(x_0, \theta_0, \dot{x}_0, \dot{\theta}_0)^T = (0, \theta_0, 0, 0)^T$ として与え、これが0に収束する過程を観察した。状態フィードバック係数 $K = (-100, -200, -100, -20)$ の場合を図3.4-1に示す。短時間に x, θ とも収束することが判る。

図3.4-2では $\theta_0=0.1\text{rad}$ に対して θ は単調に収束するが、 x は状態フィードバック係数 k_1 が小さく収束が悪い。図3.4-3では発散気味のリミットサイクルが生じた。

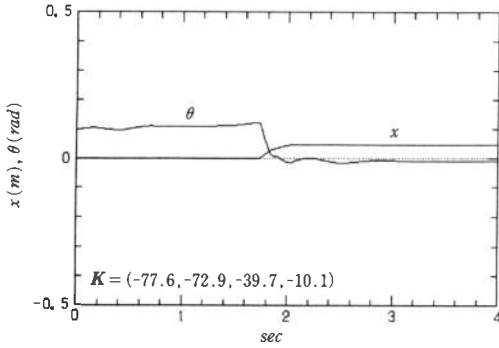


図3.4-2

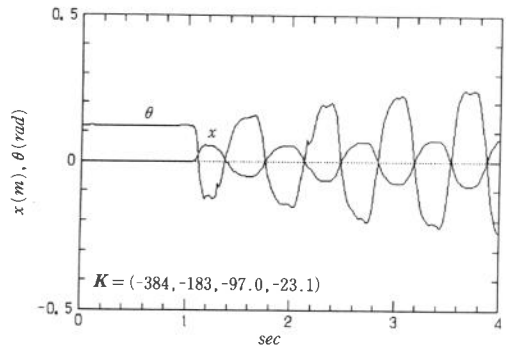


図3.4-3

これは指定の固有振動数が高く、このため K 特に x の係数 k_1 が高くて状態変数の変化が急となり、これに対して制御プログラムの実行速度が十分でないことと、実系に介在する乾性摩擦のためであると考えられる。

3) 最適レギュレータの実験例

実験例の一部を表3.4-3に示す。

表3.4-3

Q (対角要素)\ R	0.003	0.01
100,1,1,0.1	図3.4-4	図3.4-5
1,100,1,0.1	図3.4-6	図3.4-7

(1) R の影響

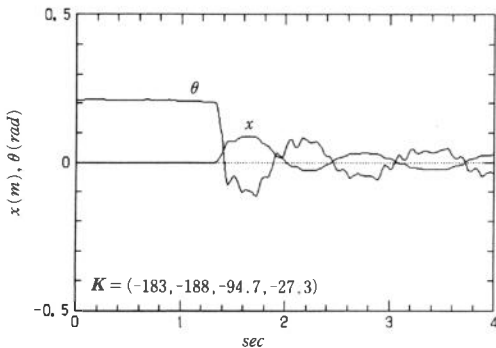


図3.4-4

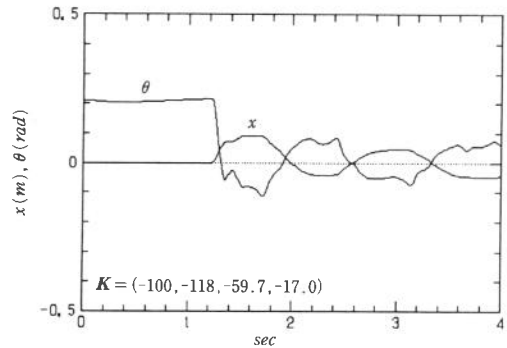


図3.4-5

図3.4-4, 図3.4-5を比較すると所要エネルギー項の評価 R を重くした後の方が、制御エネルギー消費を厳しくした分だけ出力即ち台車の位置 x , 振子の傾き θ の収束は悪くなることが判る。

同様に図3.4-6に対して図3.4-7を比較すると x の収束は悪く、遂に台車はストロークリミッタに当たって、振子は倒れてしまった。

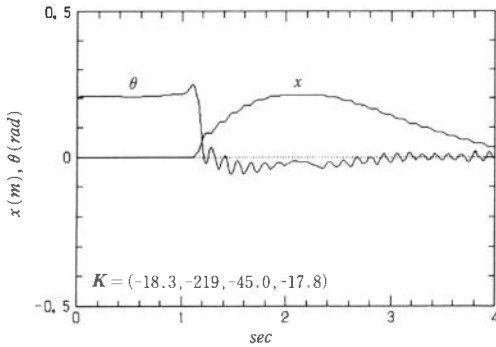


図3.4-6

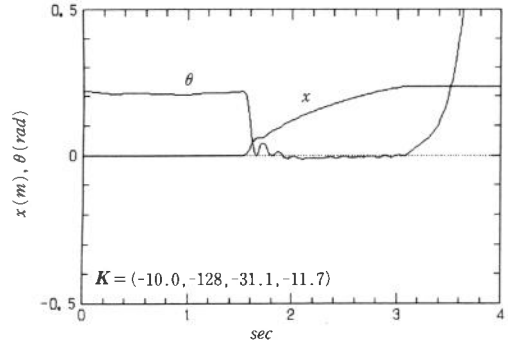


図3.4-7

(2) Q の影響

図3.4-5に対して図3.4-7を比較すると、 x 、 θ に対する重みが前者では100:1に対して、後者では1:100にしてあるため θ の制御性を厳しくすることになり、 θ は格段に速く収束するが他方 x が相対的に軽く見られるため x の収束は悪い。この比較の組よりも更に制御エネルギー消費を軽く評価した図3.4-4と図3.4-6の組を比較する。この場合 θ の制御条件を厳しくした後者では、 θ の収束は格段に速いが x の評価が軽くなっているため、 x の収束はかなり遅い経過を辿ることが判る。実際の制御の重み関数の選択に当たっては、このような特性に基いて x 、 θ 及び消費エネルギーに対して、最も適当な値を相対的に選ぶことになる。

4) 実系での問題点

理論と実系の比較で問題となるのは、実系に存在する摩擦抵抗である。これを小さく抑えないと、線形近似との隔たりが大きくなりリミットサイクルが出現する。またデジタルシミュレーションでも、演算の刻み時間が十分小さくないと元来収束すべき系が発散する不合理を生じるので注意を要する。

4 結 語

システム制御工学は多変数を、ある適当な制御則の下に行列演算していくが、行列方程式は極低次元でない限り解析的に導くことは難しく教育上でも理解を難しくしている。倒立振子は多変数制御の好適例として取り上げられるので、ここではこの不安定系の安定化手法として考えられる状態フィードバック法のうち、極配置法及び最適レギュレータについて、制御方針と出力の関係をシミュレーションと実系について調べた。即ちデジタルシミュレーションでは極配置法の場合所期の応答を得るが、固有振動数が高くてフィードバックゲインが大きいとき、演算の刻み時間によっては解の収束が悪いことが起こる。同じく最適レギュレータの場合、状態変数群と制

御所要エネルギー間の相対評価に対する出力を比較した。所要エネルギー項を重視するほど、出力の収束は緩くなり、また状態変数の台車位置と振子傾角相互間の重みを移動することにより、振子傾角は早期に収束できるが、特に台車位置は収束が悪くなる場合がある。これを実系で実験すると概ね対応する応答を示すが、なかには出力がリミットサイクルになったり、またこれが発散的になる場合もある。これは系内にある摩擦とコンピュータの実行速度によるものと考えられる。

今後、こうしたシステムを利用して、各制御方針の持つ意味の具体的把握を図り、これを基に実際のシステムへ有効な適用を考えたい。この研究では東京工科大学機械制御工学科大山恭弘講師には、実系の仕様データに関して有益な御教示を賜った。記して厚く謝意を表す。

参 考 文 献

- 白石昌武：入門現代制御理論，日刊工業新聞社，1995
小郷寛，美多勉：システム制御理論入門，実教出版，1979
末松良一：機械制御入門，オーム社，1988
大山恭弘：ためしなから学ぶモータ制御，インターフェース誌，CQ出版社，1993，Spet
K. Ogata: Designing Linear Control Systems with MATLAB, Prentice Hall, 1994