多端子伝送回路網の計算について

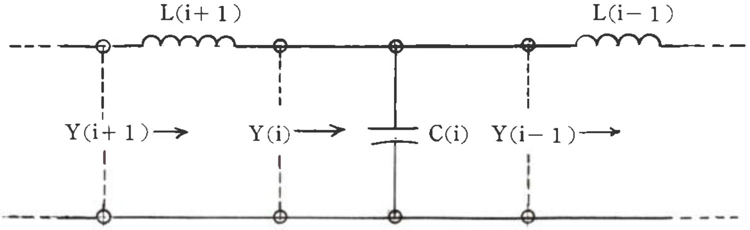
小　　塚　　正　　雄

伝送回路は電気工学の古典的分野であるが，工学的には重要な意味をもっている。 振動，音響，あるいは伝熱の諸問題の多くはこの回路モデルによって近似できる。この小論文は多端子のはしご形回路網について，その計算を考えたものである。

1　回路網の組立

(1)　線路の構成（はしご形 L/C 回路網）

はしご形回路としては，R/G またはR/C も考えられるが，ここでは振動学の見地から重要な低域通過形の L/C 回路網をとり上げる（第1図)。



第1図　低域通過形 L/C 回路網

● 線路の各素子には出力端から順次 1, 2……と番号をふり当てる。

また，例えば，アドミッタンス Y(i)というときには，(i)番目の素子と(i+1)番目の素子の間で出力側を見たアドミッタンスであると考える。電流 I(i)，電圧 V(i)についても同様。

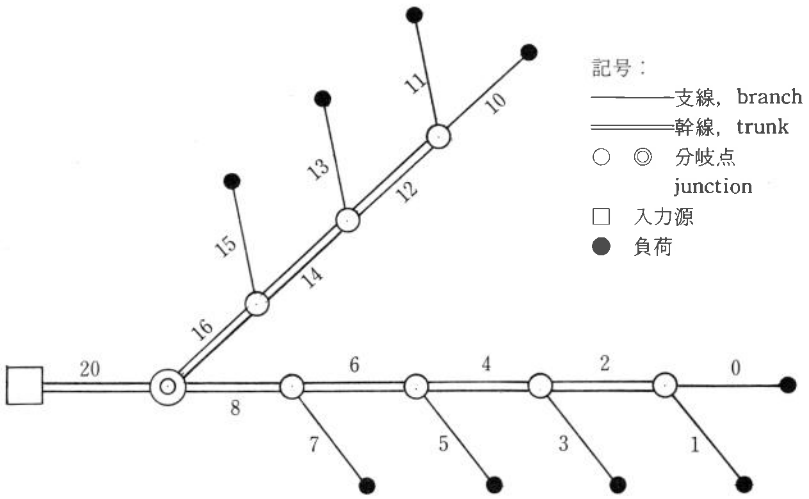
(2)　回路網のパターン

前項のようなL/Cの線路が集まって回路線を構成する。 そのパターンとしてはいろいろ考えられるが，ここでは第2図のようなものを考える。

線路の各々には図のように番号をふり当てる。

*支線は0，10および奇数の番号，幹線は0，10を除いた偶数の番号をもつ。

*線路#0から#8までは幹線“A”に，#10から#16までは幹線“B”に属する。



第２図　回路網のパターン

2　計 算 の 理 論

(1)　単一線路における電流/電圧

(i)番目の素子から見たアドミッタンスを Y(i)＝P(i)/Q(i)とする。

ここで，P(i)，Q(i)は演算子sの多項式

＊(i)番目の素子がインダクタンス L(i)のとき，

$$\left.\begin{aligned} P(i) &= P(i-1) \\ Q(i) &= s \cdot L(i) \cdot P(i-1) + Q(i-1) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで，P(i−1)は(i−1)次の多項式。

Q(i−1)は(i−2)次の多項式(i=1のときはゼロ次)

＊(i)番目の素子がキャパシタンス C(i)のとき，

$$\left.\begin{aligned} P(i) &= s \cdot C(i) \cdot Q(i-1) + P(i-1) \\ Q(i) &= Q(i-1) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ここで，P(i−1)は(i−2)次の多項式(i=1のときはゼロ次)

Q(i−1)は(i−1)次の多項式。

いま，(N)番目の素子の電流を I(N)，電圧を V(N)とすると，(i)番目の素子の電流および電圧は，

$$\left.\begin{aligned} I(i) &= P(i) \cdot I(N)/P(N) = P(i) \cdot V(N)/Q(N) \\ V(i) &= Q(i) \cdot I(N)/P(N) = Q(i) \cdot V(N)/Q(N) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(2)　固有多項式

いま，単一線路で L/C 素子の総数がNとする。

＊入力源が起電流 Is とコンダクタンス Gs から成るとき，固有多項式は

$$Ps = Gs \cdot Q(N) + P(N) \tag{4}$$

また，

$$I(i) = P(i) \cdot Is/Ps \qquad V(i) = Q(i) \cdot Is/Ps \tag{5}$$

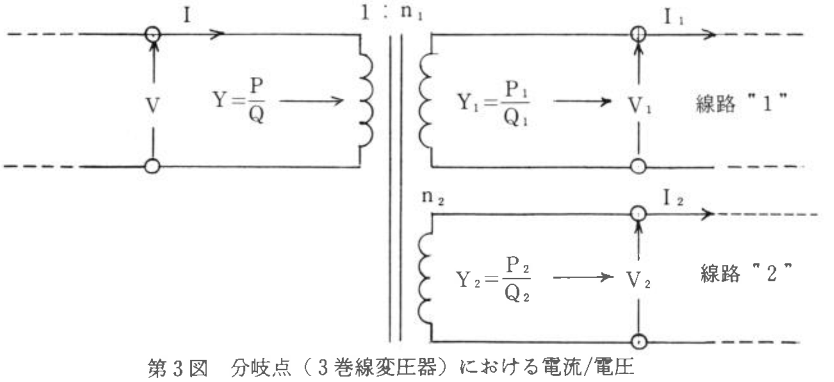
＊入力源が起電力 Vs と 抵抗 Rs から成るとき，固有多項式は

$$Qs = Rs \cdot P(N) + Q(N) \tag{6}$$

また，

$$I(i) = P(i) \cdot Vs/Qs \qquad V(i) = Q(i) \cdot Vs/Qs \tag{7}$$

(3)　分岐点における電流/電圧



第３図　分岐点（３巻線変圧器）における電流/電圧

分岐点は第３図のような巻数比n_1，n_2の３巻線変圧器であるとする。電流/電圧を図のように表わすと，

$$V_1 = n_1 \cdot V \qquad V_2 = n_2 \cdot V \qquad I = n_1 \cdot I_1 + n_2 \cdot I_2$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} P &= (n_1 \cdot P_1) \cdot (Q_2/n_2) + (n_2 \cdot P_2) \cdot (Q_1/n_1) \\ Q &= (Q_1/n_1) \cdot (Q_2/n_2) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

入力源が起電流のとき，$V = Q \cdot Is/Ps$，$I = P \cdot Is/Ps$ であるから，

$$I_1 = P_1 \cdot (Q_2/n_2) \cdot Is/Ps$$

$$V_1 = Q_1 \cdot (Q_2/n_2) \cdot Is/Ps$$

$$I_2 = P_2 \cdot (Q_1/n_1) \cdot Is/Ps$$

$$V_2 = Q_2 \cdot (Q_1/n_1) \cdot Is/Ps$$

入力源が起電力のときは，(Is/Ps)の代わりに(Vs/Qs)となる。

以上のことから，例えば線路 "1" の(i)番目の素子の電流/電圧は，

$I(i)=P(i)\cdot(Q_2/n_2)\cdot Is/Ps$

$V(i)=Q(i)\cdot(Q_2/n_2)\cdot Is/Ps$

また，線路“２”の(ｉ)番目の素子では

$I(i)=P(i)\cdot(Q_1/n_1)\cdot Is/Ps$

$V(i)=Q(i)\cdot(Q_1/n_1)\cdot Is/Ps$

すなわち，信号を分岐点を通って

線路“１”に入ったときは，Q_2/n_2

線路“２”に入ったときは，Q_1/n_1

をそれぞれ掛けることになる。

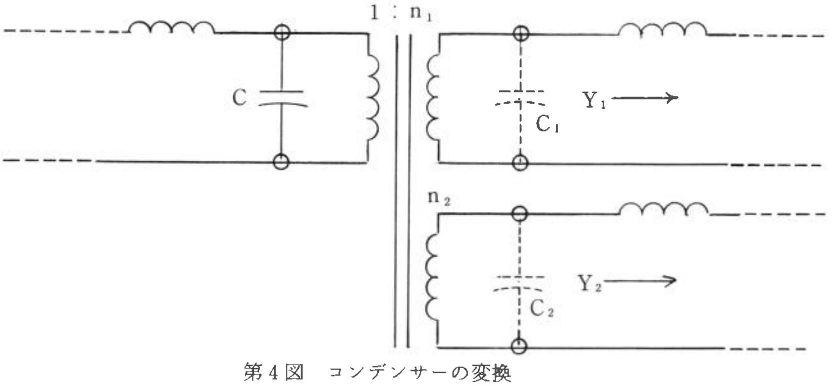
３　計 算 の 組 立

３．１　線路の計算

＊はしご形回路は連分数の計算のくり返しで，出力端から入力端に向かってアドミッタンスの多項式 P(i)，Q(i)を(1)，(2)式にしたがって順次計算して行く。

計算は各線路ごとに行い，線路番号の順に

＃０，＃１，……#10，#11，……#20　と行なう。



第４図　コンデンサーの変換

分岐点のすぐ近くにあるキャパシターは入力側幹線にまとめる。例えば第４図でC_1，C_2は取り除き，その代わりに　$C_0=n_1^2\cdot C_1+n_2^2\cdot C_2$

をＣに付加する。

入力側幹線の出力端がインダクタンスＬのときには，新たにキャパシタンスＣを付け加えそれに Co を組み込れる。

＊上記のようなキャパシタンスの変換を行うと，線路の次数（固有多項式の次数）はその線路に属する L/C 素子の数に等しくなる。ただし，幹線の出力端がインダクタンスであるときには，それは数に入れない。（これは，入力側線路のアドミッタンスY_1およびY_2がともに誘導性でそ

れにLを加えても固有多項式の次数は増えないからである。)

＊以上にもとづいて，各線路ごとに行う計算/処理をまとめると次のようになる。

＊支線の場合，負荷がRであるかGであるかを決め，それを入力する。同時にそれからP(0)，Q(0)（初期値）を定める。

＊幹線の場合，その出力端がLであるかCであるかを決める。 P(0)，Q(0)は分岐点で(8)式にしたがって計算した値を入れる。

＊L/C 素子の数(j)および L/C の値を入力する。

＊幹線で，前段（出力側）の線路から移された Co があるときはそれを最初のキャパシタンスC(1)に組み入れる。 最初の素子がL(1)のときは，新しいキャパシタンスをC(1)として付け加え， j＝j＋1とする。素子の番号はひとつずつくり下げる。

＊入力端がキャパシタンスC(j)であるときは，それを分岐点の変圧比nにしたがって変換し，Co として記憶する。($Co=n^2 \cdot C(j)$)
また， j＝j－1 とする。

＊(1)，(2)式にしたがって，P(i)，Q(i)を順次計算する。

3．2 固有多項式の計算

回路網全体の固有多項式は次のような手順にしたがって求める。

(1) 支線#0について前項の手順で順次P(i)，Q(i)を計算し，最後に $Po=n \cdot P(j)$，$Qo=Q(j)/n$ を求めて，それを一時記憶する。ここで， j は線路の次数， n は分岐点の変圧比（以下同様）。N＝j とする。

＊線路の負荷は Ko(0)として，L/C 素子の値は Ko(1)，……Ko(j)として記憶する（以下同様)。

＊Qo は，W(0)として記憶する。

(2) 支線#1について同様に計算し，最後に $P=n \cdot P(j)$，$Q=Q(j)/n$ を求める。

＊Qは，W(1)として記憶する。

(3) P，Q，Po，Qo から(8)式にしたがって幹線#2の出力端におけるP(0)，およびQ(0)を

$$P(0)=P \cdot Qo+Po \cdot Q \qquad Q(0)=Q \cdot Qo$$

として求める。Q(0)の次数は N+j，P(0)の次数は N+j－1。そこであらためて N=N+j とする。

＊P(0)，Q(0)はそれぞれ U(1)，V(1)として記憶する。

(4)　前項の P(0)，Q(0)を初期値として，幹線#２について計算を進める。最後にPo＝n•P(j)，Qo＝Q(j)/n を求めそれらを一時記憶する。ここで，Qo の次数は N＋j，Po の次数は N＋j－1。そこでN＝N＋j とする。

＊Q(0)は，W(2)として記憶する。

(5)　幹線“A”について，上記の手順(2)，(3)，(4)をくり返し，線路#３，#４，……の順に計算して行く。最後の線路#m(第２図ではm＝８)で得られた n•P(j)，Q(j)/n，N＋j をそれぞれP_1，Q_1，N_1として一時記憶する。ここで，Q_1の次数はN_1，P_1の次数はN_1-1。

＊Q_1は，W(m)として記憶する。

(6)　前項の(1)～(5)の計算を線路#10，#11，……（幹線“B”）について同様に行う。最後の線路#m′（第２図の例では m′＝16）について得られた n・P(j)，Q(j)/n，N＋j をそれぞれ P，Q，N とする。Q の次数は N，P の次数は N－１。

＊Q は，W(m′)として記憶する。

(7)　幹線“B”で得られた P，Q，N と，幹線“A”で得られたP_1，Q_1，N_1から，(8)式にしたがって，線路#20の初期値を

$P(0)=P\cdot Q_1+P_1\cdot Q$　　　　$Q(0)=Q\cdot Q_1$

として求める。Q(0)の次数は $N+N_1$，P(0)の次数は $N+N_1-1$。

そこで，$N=N+N_1$とする

＊P(0)，Q(0)は，それぞれ U(10)，V(10)として記憶する。

(8)　線路#20について計算を進め，P(j)，Q(j)を求める。N＝N＋j とする。

(9)　入力源のコンダクタンス Gs または抵抗 Rs を入力し，(4)または(6)式によって固有多項式(Ps または Qs) を求める。その次数はN。

3．3　伝達関数の計算

いま，線路#ℓの(k)番目の素子で，電流 I(k)または電圧 V(k)を検出したとする。伝達関数は

$$G=X/Xs=W\cdot M/Ms$$

ここで，

X＝I(k)またはV(k)。

Xs＝Is または Vs。

$M=P(k)(X=I(k)$のとき)または $Q(k)(X=V(k)$のとき)。

$Ms=Ps(Xs=Is$ のとき)または $Qs(Xs=Vs$ のとき)。

W：各々の分岐点に関係する多項式の積で，２・(３)項にしたがって計算される。

- ここで，Mは，線路の初期値 P(０)，Q(０)およびL/C素子の値が記憶されているから，それらから計算できる。したがって，伝達関数の計算はWの計算になる。

各線路の入力端における多項式Q_0，Q_1またはQはそれぞれ w(i)として記憶されている。それらを使うとWは次のようになる。(m，m′はそれぞれ幹線"A"および"B"の最後の線路の番号……３.２ (5)，(6)参照。)

(1)　$0 \leqq \ell < 10$（幹線"A"の場合）：

- ℓが偶数のとき，

$W=w(m')\cdot w(m-1)\cdot w(m-3)\cdots w(\ell+1)$

- ℓが奇数のとき，

$W=w(m')\cdot w(m-1)\cdot w(m-3)\cdots w(\ell+2)\cdot w(\ell-1)$

(2)　$10 \leqq 1 < 20$（幹線"B"の場合）：

- ℓが偶数のとき，

$W=w(m)\cdot w(m'-1)\cdot w(m'-3)\cdots w(\ell+1)$

- ℓが奇数のとき

$W=w(m)\cdot w(m'-1)\cdot w(m'-3)\cdots w(\ell+2)\cdot w(\ell-1)$

(3)　$\ell=20$：　$W=1$

4　あ　と　が　き

ここ十数年の間，計算機の普及にともない構造力学の計算は飛躍的な進歩を逐げた。この論文に類推する問題はこの方面からすでに論ぜられていると思う。　筆者は回路論の立場から考えたが，諸賢のご批判を載ければ幸いである。