

# 図形処理と Lagrange 内挿法

中 島 達 夫

## 1 ま え が き

コンピュータを用いて曲線を描く場合、その曲線の原情報は数式の形で与えられるか、または点座標データの集合で与えられる。理論的な曲線は数式で示すことができるが、一般の自由曲線は不連続な点の位置を示す座標データ群で指示せざるをえない。そしてこの自由曲線は、指示された点の間を直線または円弧、2次曲線等で順次結ぶことによって形成される。理論的な曲線の場合でも、ある大きさの間隔で画点位置を計算し、それらの点を直線等で結んで近似的に曲線を描かざるをえない。理論曲線もその投影図を描く場合などでは、さらに投影変換の手続きが必要となり、そのため計算的に求められる画点の間隔はあまり小さくすることは時間的にも困難となり、したがって滑らかな曲線を得るのには直線で点を結ぶのでは不十分であることも起こりうる。

このように曲線上でサンプリングされたいくつかの点を結んで曲線を描くとき、曲線性を損なわないよういろいろの方法が用いられるが、ここでは Lagrange の内挿法によってサンプリング点の間を補間し、曲線の近似性をよくする方法について、その妥当性を検討した。

## 2 Lagrange の内挿公式

図1に示すように、 $m+1$ 個の座標点  $(t_i, f_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ) を通る  $m$ 次多項式

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m \quad (1)$$

は Lagrange の方法により、次式のように表わすことができる。

$$f(t) = \sum \frac{\pi(t)}{(t - t_k) \pi'(t_k)} f_k \quad (2)$$

ここで  $\pi(t) = (t - t_0)(t - t_1)\dots(t - t_m)$

$$\pi'(t_k) = \left. \frac{d}{dt} \pi(t) \right|_{t=t_k}$$

(1) 2次近似式

与えられた3点  $(t_0, f_0)$ ,  $(t_1, f_1)$ ,  $(t_2, f_2)$  を通る2次

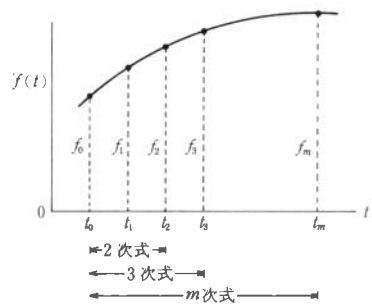


Fig. 1 多項式近似

式で補間するもの(図1)で, (2)式において  $m = 2$  として, 次式のようにえられる。

$$f(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} f_0 + \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} f_1 + \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} f_2 \quad (3)$$

(2) 3次近似式

与えられた4点  $(t_0, f_0), (t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3)$  を通る3次式で補間するもの(図1)で, (2)式において  $m = 3$  として, 次式のようにえられる。

$$f(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} f_0 + \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} f_1 + \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} f_2 + \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} f_3 \quad (4)$$

### 3 曲線の内挿近似

画面上に直角座標  $O-x, y$  をとり, この面内に曲線  $C$  を描くものとする(図2)。

この曲線  $C$  が助変数  $t$  を用いて

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

とあらわしうるものとする。

$t$  の定義域を  $n$  等分し, その区間長を  $h$ , その等分点を  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  とし(図3), これらの  $t$  に対応する関数値  $x(t_i), y(t_i) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  は既知とする。

任意の  $i$  の値を  $k$  とし,  $t_k$  と  $t_{k+1}$  の間を Lagrange の方法で内挿する。内挿点  $t$  を

$$t = t_k + sh \quad (0 < s < 1)$$

とし, この  $t$  に対応する関数値  $x(t), y(t)$  を(3), (4)式を用いてそれぞれ別個に求め,  $(x(t), y(t))$  を内挿点とする。以下に示す式で  $f$  はしたがって  $x$  または  $y$  をあらわす。

近似は2次式と3次式の両方を示し, 内挿点は既知点間を4等分する点 ( $s = 1/4, 1/2$  および  $3/4$ ) をとりあげるものとする。

なお助変数  $t$  は別に具体的な意味をもつ必要はなく, 特に自由曲線の場合には単なる便宜的な性格をもつに過ぎない。

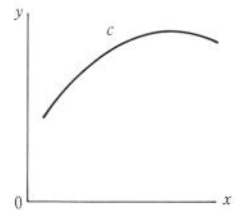


Fig. 2 曲線と座標

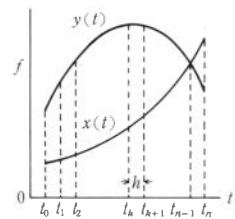


Fig. 3 助変数  $t$  による曲線表示

(1) 2次近似式 (図4)

(i) 前進形

$t_k, t_{k+1}, t_{k+2}$  における  $f$  (具体的には  $x$  または  $y$ , 以下同) の値  $f_k, f_{k+1}, f_{k+2}$  を既知とし,  $t_k \sim t_{k+1}$  の間の内挿点を求める。

(3)式において  $t_0, t_1, t_2$  をそれぞれ  $t_k, t_{k+1}, t_{k+2}$  とおきかえ,

$$t_{k+s} = t_k + sh$$

とすると,

$$f_{k+s} = \frac{1}{2} (1-s)(2-s) f_k + s(2-s) f_{k+1} - \frac{1}{2} s(1-s) f_{k+2} \quad (5)$$

1区間内に内挿点を3個 ( $s=1/4, 1/2, 3/4$ ) 求めると, 次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/4} &= (21 f_k + 14 f_{k+1} - 3 f_{k+2})/32 \\ f_{k+1/2} &= (3 f_k + 6 f_{k+1} - f_{k+2})/8 \\ f_{k+3/4} &= (5 f_k + 30 f_{k+1} - 3 f_{k+2})/32 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(ii) 後進形

$t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$  における  $f$  の値,  $f_{k-1}, f_k, f_{k+1}$  が既知で,  $t_k \sim t_{k+1}$  の間の内挿点を求める。

(3)式において  $t_0, t_1, t_2$  をそれぞれ  $t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$  とおきかえ,

$$t_{k+s} = t_k + sh$$

とすると,

$$f_{k+s} = -\frac{1}{2} s(1-s) f_{k-1} + (1+s)(1-s) f_k + \frac{1}{2} s(1+s) f_{k+1} \quad (7)$$

$s=1/4, 1/2, 3/4$  とすると,

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/4} &= (-3 f_{k-1} + 30 f_k + 5 f_{k+1})/32 \\ f_{k+1/2} &= (- f_{k-1} + 6 f_k + 3 f_{k+1})/8 \\ f_{k+3/4} &= (-3 f_{k-1} + 14 f_k + 21 f_{k+1})/32 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(2) 3次近似式 (図5)

(i) 前進形

$t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}$  における  $f$  の値,  $f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, f_{k+3}$  を既知とし,  $t_k \sim t_{k+1}$  の間を内挿する。

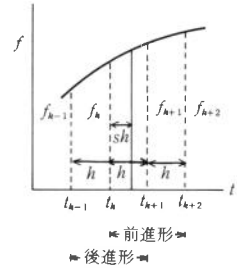


Fig. 4 2次式近似

(4)式において  $t_0, t_1, t_2, t_3$  をそれぞれ  $t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}$  におきかえ,

$$t_{k+s} = t_k + sh$$

とすると,

$$f_{k+s} = \frac{1}{6}(1-s)(2-s)(3-s)f_k + \frac{1}{2}s(2-s)(3-s)f_{k+1} - \frac{1}{2}s(1-s)(3-s)f_{k+2} + \frac{1}{6}s(1-s)(2-s)f_{k+3} \quad (9)$$

$s = 1/4, 1/2, 3/4$  とすると,

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/4} &= (77f_k + 77f_{k+1} - 33f_{k+2} + 7f_{k+3})/128 \\ f_{k+1/2} &= (5f_k + 15f_{k+1} - 5f_{k+2} + f_{k+3})/16 \\ f_{k+3/4} &= (15f_k + 135f_{k+1} - 27f_{k+2} + 5f_{k+3})/128 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(ii) 中進形

$t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2}$  における  $f$  の値,  $f_{k-1}, f_k, f_{k+1}, f_{k+2}$  を既知とし,  $t_k \sim t_{k+1}$  の間を内挿する。

(4)式において  $t_0, t_1, t_2, t_3$  をそれぞれ  $t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, t_{k+2}$  とおきかえ,

$$t_{k+s} = t_k + sh$$

とすると,

$$f_{k+s} = -\frac{1}{6}s(1-s)(2-s)f_{k-1} + \frac{1}{2}(1+s)(1-s)(2-s)f_k + \frac{1}{2}(1+s)s(2-s)f_{k+1} - \frac{1}{6}(1+s)s(1-s)f_{k+2} \quad (11)$$

$s = 1/4, 1/2, 3/4$  とすると,

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/4} &= (-7f_{k-1} + 105f_k + 35f_{k+1} - 5f_{k+2})/128 \\ f_{k+1/2} &= (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16 \\ f_{k+3/4} &= (-5f_{k-1} + 35f_k + 105f_{k+1} - 7f_{k+2})/128 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(iii) 後進形

$t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$  における  $f$  の値,  $f_{k-2}, f_{k-1}, f_k, f_{k+1}$  が既知で,  $t_k \sim t_{k+1}$  の間を内挿する。

(4)式において  $t_0, t_1, t_2, t_3$  をそれぞれ  $t_{k-2}, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}$  とおきかえ,

$$t_{k+s} = t_k + sh$$

とすると,

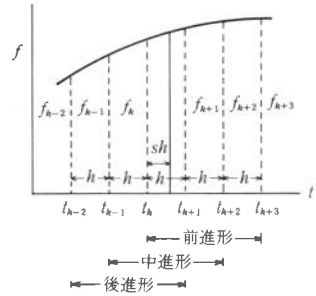


Fig. 5 3次式近似

$$f_{k+s} = \frac{1}{6}(1+s)s(1-s)f_{k-2} - \frac{1}{2}(2+s)s(1-s)f_{k-1} + \frac{1}{2}(2+s)(1+s)(1-s)f_k + \frac{1}{6}(2+s)(1+s)sf_{k+1} \quad (13)$$

$s=1/4, 1/2, 3/4$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/4} &= (5f_{k-2} - 27f_{k-1} + 135f_k + 15f_{k+1})/128 \\ f_{k+1/2} &= (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 15f_k + 5f_{k+1})/16 \\ f_{k+3/4} &= (7f_{k-2} - 33f_{k-1} + 77f_k + 77f_{k+1})/128 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

#### 4 適用例とその内挿精度

##### 4.1 適用例

Lagrange の内挿法を次記の 4 例に適用した。

A: 楕円曲線

$$x = a \cos(t), \quad y = b \sin(t) \quad (t = 0 \sim \pi)$$

B: 正弦曲線

$$x = (2a/\pi)t, \quad y = b \sin(t) \quad (t = 0 \sim \pi)$$

C: 余弦曲線

$$x = (2a/\pi)t, \quad y = b \cos(t) \quad (t = 0 \sim \pi)$$

D: 自由曲線

翼およびそのまわりの流線 (図 6)

このうち A, B, C の 3 例は理論曲線で、内挿法を利用する応用的効果はあまりないが、内挿の精度を調べる便宜上とりあげた。また D 例は自由曲線で、点座標のデータ数の節約を図るのに内挿法が役立つ例としてとりあげた。

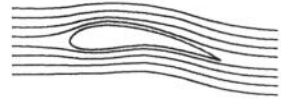


Fig. 6 自由曲線 (翼とそのまわりの流線)

A, B, C の 3 例では、 $t$  の定義域を  $n$  個の区間に等分する  $n+1$  の個所における  $x, y$  の理論点を既知とし、その相隣る  $x, y$  の間にそれぞれ独立に内挿点を求め、その内挿値と理論値との誤差を調べた。

A, B, C の理論式において  $a/b = 2$  とし、等分区間数  $n$  は 6 と 4 の 2 種の値を採用した。また近似式は 2 次式および 3 次式の両方の内挿式について試みた。内挿点はいずれも各区分ごとに 3 点 ( $s=1/4, 1/2$  および  $3/4$ ) をとった。

内挿の誤差率は次式によって計算した値とする。

$$\text{誤差率} = [(y \text{ の内挿値}) - (x \text{ の内挿値に対応する } y \text{ の理論値})] / b \times 100$$

D 例では、翼断面は  $n=10$ 、流線は  $n=7$  とし、それらの点の配置は曲率の強い個所は区間を

せまくして適当にとった。内挿近似は3次式のみを示す。

なお内挿公式は、 $t_0 \sim t_1$ 間は前進形 ((6), (10)式),  $t_{n-1} \sim t_n$ は後進形 ((8)式, (14)式)を用い、その他の範囲では、2次式近似では前進形, 3次式近似では中進形 ((12)式)を用いた。

#### 4. 2 内挿精度

A, B, Cの3例にLagrangeの内挿法を施した結果, その内挿精度は図7に示すようになった。

##### (1) 2次式近似と3次式近似

一般的には高次近似ほど計算時間は長いが精度は向上するのは当然で, この適用例でもその傾向がみられる。ただしA例の両端区間部では, 逆に2次式の方が3次式の場合より精度が良い。これは曲線が端点をもつ半曲線であり, しかもその個所で曲率の変化が大きいことに起因するものと考えられる。このようなケースでは両端部において2次式を, 中間部では3次式を用いるの

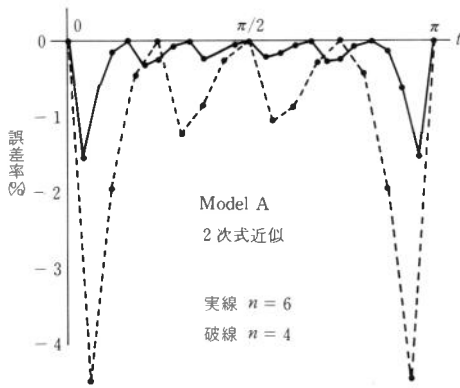


Fig. 7.1.1 Lagrange 内挿の誤差率

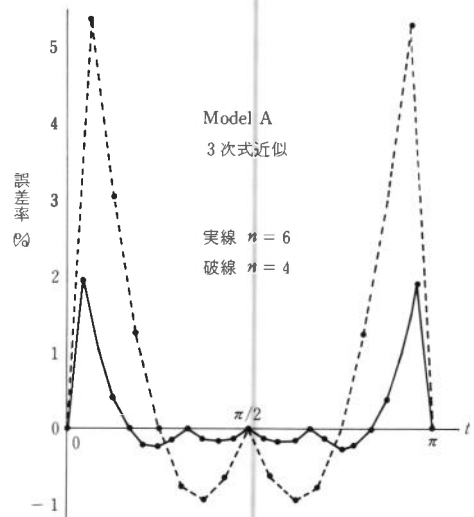


Fig. 7.1.2 Lagrange 内挿の誤差率

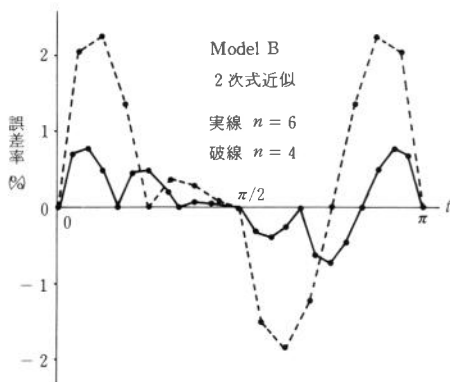


Fig. 7.2.1 Lagrange 内挿の誤差率

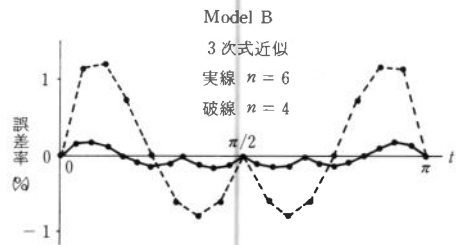
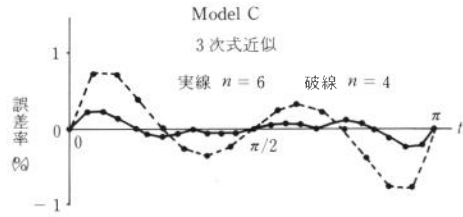
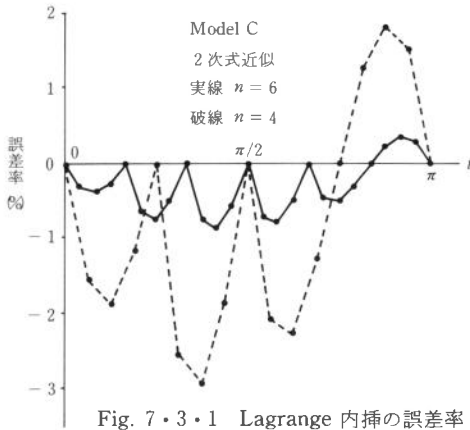


Fig. 7.2.2 Lagrange 内挿の誤差率



もよいであろう。しかしいずれにしろA, B, Cのような半曲線では、両端部における内挿精度は中間部より悪くなることはまぬがれないであろう。

(2) 区間分割数  $n$  による比較

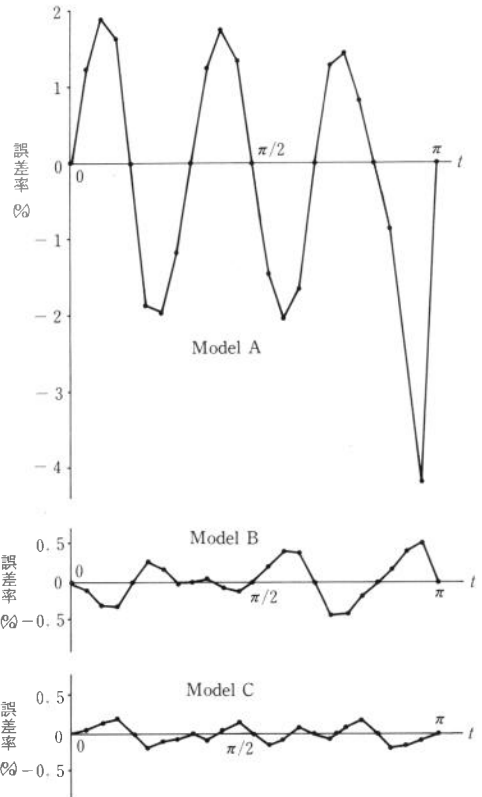
曲線を  $n$  個の区間に分割し、その各区間について内挿を行ったのであるが、 $n$  は 6 と 4 の 2 種をしらべた。図 8 で実線は  $n=6$ 、破線は  $n=4$  の結果である。分割数  $n$  が大きいほど計算時間が長くなるが精度は向上するのは当然で、本例でもその傾向があらわれている。

なお精度を良くするには、曲率変化の大きい部分および両端部で区間長が小さくなるような分割の仕方を採用するのが有効であろう。

5 円弧近似法との比較

曲線の内挿法としては従来、既知点間を円弧で結ぶ方法がよく用いられる。この方法では、既知点の両側の円弧の接線がその既知点において一致する所謂接線接続法が用いられ、また最初の点 (b) における曲線の法線方向値も既知であることが要求されることが多い。

この方法は曲線の接続が滑らかに行われ、上手に用いると良い結果が得られる。しかし充分検討して使わないと、途中で不必要に曲率が反転したりして、良くない結果となることがときどき起る。また初期接線方向が指定しにくいこともあり、特に投影図を作るときのように中間に変換手続き



が入るときにこれがよくおこる。

それはともかくとしてこの接線接続円弧近似法を前記A, B, Cの3例に適用し, その内挿精度を Lagrange 内挿法と同様にして計算して比較してみた。図8が円弧近似法の誤差率を示す。内挿区間数  $n$  は6とした。

なおこの円弧近似法は図9に示すように, 区間  $P_k(x_k, y_k) \sim P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$  ( $k = 0 \sim n-1$ ) を中心  $C_k$ , 半径  $R_k$  の円弧で結ぶもので, 次式を用いてプログラミングできる。

$C_k$  の座標を  $x_{c_k}, y_{c_k}$  とする。 $C_k$  は  $P_k$  と  $C_{k-1}$  を通る直線と  $P_k, P_{k+1}$  の垂直二等分線との交点として求められる。

$$x_{c_k} = \frac{x_{k+1}^2 - x_k^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + 2n_k x_k (y_{k+1} - y_k)}{x_{k+1} - x_k + n_k (y_{k+1} - y_k)}$$

$$y_{c_k} = y_k + n_k (x_{c_k} - x_k)$$

$$R_k = \sqrt{(x_k - x_{c_k})^2 + (y_k - y_{c_k})^2}$$

$$n_k = \frac{y_k - y_{c(k-1)}}{x_k - x_{c(k-1)}} \quad (k > 0)$$

$$= n_0 \quad (\text{既知}) \quad (k = 0)$$

適用例A, B, Cについて, 円弧法の結果と Lagrange の2次式内挿法の結果とその精度を比較すると, 円弧法はAにおいて劣り, Cにおいて優る結果がみられる。

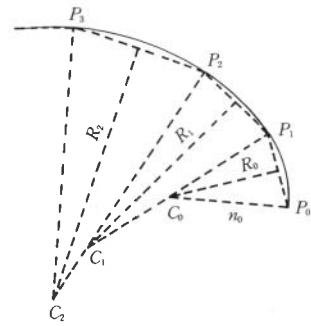


Fig. 9 円弧近似法