

回 転 面 鏡 の 像

中 島 達 夫

1 ま え が き

最近道路交通の輻輳とともに道路鏡の設置が増えてきた。この道路鏡は直視できない場所を我々に見せてくれる便利さをもっているが、反面実像との異和感も大きく、そのまま受け取るとかえって大きな事故につながることもなりかねない。したがってその設置方法さらには使用の仕方にも注意が必要であろう。

自動車等の車体に設置された鏡については多くの研究・実験がなされているが、道路鏡についての研究は比較的少ないようである^{1,2)}。

当稿では回転面よりなる鏡の像の理論的解法について述べ、その実用的な面についてはほとんど触れる所は無い。

回転面鏡のうち最もよく使用されているのは球面鏡であろう。そこでまず球面鏡について検討し、ついで一般回転面鏡の解法について述べる。勿論球面鏡も一種の回転面鏡であるから、共通した解法でその像を求めることはできる。しかし球面鏡はその特性上理論的取扱い是最も簡単であるので、特に球面鏡の解を先にとりあげ、一般論は後にまわした。

2 球 面 鏡 の 像

2. 1 任意目標点の像点

球面鏡 S の球心 O を原点とし、視点 E を通過して y 軸をとり、これに直交して水平方向に x 軸を、また x, y 両軸と直交して下方に z 軸をとる(図1)。

空間の任意点 P_1 を目標点とし、その S 上の像点を P とする。すなわち P_1 から出る光線が S 上の P 点で反射して視点 E に到達するものとする。

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ を既知としてその像点 $P(x, y, z)$ を求めてみよう。

球面 S の半径を r 、 OE の長さを a とする。さらに y 軸および P_1 点を含む平面を考え、その平面内で y 軸に直交して x' 軸をとる。平面 $O-x', y$ による球面 S の切断円を C とすると、 P_1 の像点 P は円 C 上に存在する(図2)。

P_1, P の $x'-y$ 座標をそれぞれ (x'_1, y_1) 、 (x', y) とすると、

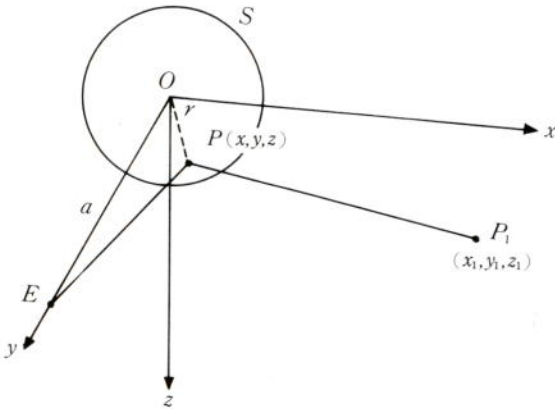


図1 球面鏡

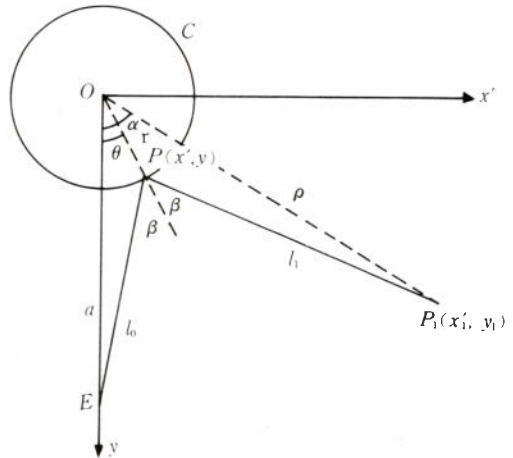


図2 球面鏡

$$x'_1 = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}, \quad x' = \sqrt{x^2 + z^2}$$

図2において

$$OP_1 = \rho, \quad EP = l_0, \quad P_1P = l_1$$

$$\angle EOP_1 = \alpha, \quad \angle EOP = \theta, \quad \angle EPP_1 = 2\beta$$

とすると、反射の法則より

$$\angle OPE = \angle OPP_1 = \pi - \beta$$

したがって

$$\alpha = \tan^{-1}(x'_1/y_1) = \tan^{-1}(\sqrt{x_1^2 + z_1^2}/y_1), \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (1)$$

$$l_0 \sin \beta = a \sin \theta, \quad l_0 \cos \beta = a \cos \theta - r$$

$$l_1 \sin \beta = \rho \sin(\alpha - \theta), \quad l_1 \cos \beta = \rho \cos(\alpha - \theta) - r$$

故に

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{a \sin \theta}{\rho \sin(\alpha - \theta)} = \frac{a \cos \theta - r}{\rho \cos(\alpha - \theta) - r}$$

したがって

$$a \rho \sin(\alpha - 2\theta) - \rho r \sin(\alpha - \theta) + a r \sin \theta = 0 \quad (2)$$

また

$$x' = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta$$

$$x = (x_1/x'_1) \cdot x', \quad z = (z_1/z_1') \cdot z_1$$

より

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta, \quad z = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} r \sin \theta \quad (3)$$

したがって像点Pの位置(x, y, z)は(1), (2)および(3)式より求めることができる。

2. 2 解 法

球面鏡の像点 P を求めるには、まず (2) 式を解かなければならない。しかし (2) 式は $\sin\theta$ に関し 4 次の方程式となるので、その解析解は複雑となり、あまり実用的ではない。むしろ数値解法または近似解析解法によるほうが便利である。

(a) 数 値 解 法

Newton-Raphson 法により逐次近似解を求める。すなわち (2) 式において

$$f(\theta) = a\rho\sin(\alpha - 2\theta) - \rho r\sin(\alpha - \theta) + ar\sin\theta$$

とし、 θ の第 1 近似根 θ_1 を

$$\theta_1 = \alpha/2$$

とし、反復公式

$$\theta_{i+1} = \theta_i - f(\theta_i)/f'(\theta_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

によって近似根 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ を逐次求め、その変動幅が適当な制限値以下になったところで計算をやめ、その近似根を θ として用いる。ここで f' は f の導関数を示す。

(b) 近 似 解 析 解

前記の Newton-Raphson 法における θ の第 1 近似根 θ_1 を θ の第 1 近似解、第 2 近似根 θ_2 を θ の第 2 近似解として用いる。すなわち

$$\text{第 1 近似解} \quad \theta = \alpha/2 \quad (5)$$

$$\text{第 2 近似解} \quad \theta = \alpha/2 - \frac{r(\rho - a)\sin(\alpha/2)}{2\rho a - r(\rho + a)\cos(\alpha/2)} \quad (6)$$

2. 3 無 限 遠 点 の 像 点

目標点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ の $x_1 \rightarrow \infty$ (ただし y_1, z_1 は有限値) の場合の像点 $P(x, y, z)$ を求めてみよう。

$a/r = k$ とし、(3) 式において $x_1 = \infty$ とすると、

$$x = r\sin\theta, \quad y = r\cos\theta, \quad z = 0 \quad (7)$$

しかるに (1) 式より

$$\alpha = \pi/2, \quad \rho = \infty$$

したがって (2) 式より

$$a\cos 2\theta - r\cos\theta = 0$$

故に

$$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{8k^2 + 1}}{4k}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{4k^2 - 1} \mp \sqrt{8k^2 + 1}}{2\sqrt{2}k} \quad (8)$$

ただし符号は、凸面鏡のとき上、凹面鏡のとき下の符号をとる。

(7), (8) 式より像点の位置が求まる。

3 一般回転面鏡の像

鏡面Sが任意の回転面である場合の像の求め方の一法を示す。

Sの回転軸をz軸とし、視点Eを通過してz軸に垂直にy軸をとる。両軸の交点Oを座標原点とし、またy, z両軸に直交してx軸をとる(図3)。

O-x, y, z空間の目標点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ のS上の像点 $P(x, y, z)$ を求める。

$OE=a$ とすると、Eの座標は $(0, a, 0)$ となる。

PにおけるS面の法線がz軸と交わる点を O' とし、 $OO'=z'$ とすると、 O' の座標は $(0, 0, z')$ となる。PにおけるSの回転半径を r とすると、 r および z' はともにzの関数となる(図4)。

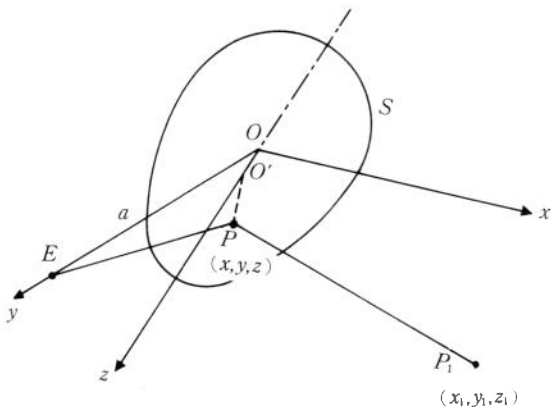


図3 一般回転面鏡

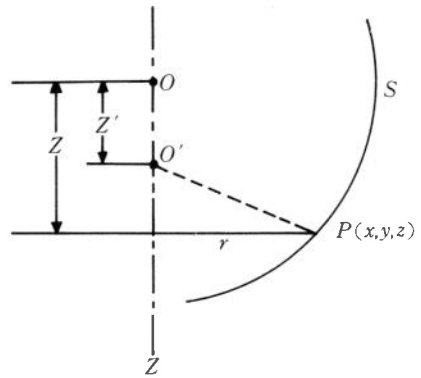


図4 一般回転面鏡

すなわち

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = r = f_1(z) \tag{9}$$

$$z' = f_2(z) \tag{10}$$

また P, P_1, E および O' の4点は同一平面内に存在するので、

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

故に

$$\{x_1(a-y) - x(a-y_1)\}z' = a(x_1z - xz_1) \tag{11}$$

P_1 を出て P で反射して E に至る光線の路長を l とすると、

$$l = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2} + \sqrt{x^2 + (a-y)^2 + z^2} \tag{12}$$

(9), (10), (11) 式より x, y は z の関数となり、したがって(12)式の l もまた z の関数とみ

なすことができる。

ところで P は l を極値とする点となる(凸面鏡では極小)。したがって

$$dl/dz = 0 \tag{13}$$

として解 z を求めることができる。しかし(13)式は z の高次関数となり、解が複雑になるので、実用的には次の数値解法による方が便利である。すなわち z をパラメーターとして、その可変範囲内で順次掃引し、(9)~(11)式を用いて(12)式の l の値を求め、それを極値とする z の値を見つければ像点 P の位置が定まる。

4 数 値 解 例

4. 1 例 題 A

水平地面上にえがかれた碁盤目状の直線群の鏡像を球面鏡および直立円筒面鏡を用いて、数値解法(2・2(a)および3)によってしらべてみた。

図5にその配置を示す。 S が曲面鏡(球面鏡または直立円筒面鏡)、 E が視点で、視点は曲面鏡の中心より水平距離 L 、地上より高さ H にあるものとする。曲面鏡の半径を r とし、球面鏡の場合にはその球心 O の地上よりの高さを h とする。図5に示すように x, y 軸をとり、また直交直線群を X_i, Y_j ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)とする。 X_i, Y_j はそれぞれ $x = ir, y = jr$ の直線群を示す。図6, 7に計算結果としての鏡像図を示す。ただし

$$L = 5r, h = r$$

とした。図6は球面鏡、図7は円筒面鏡の像で、各図とも鏡の右半分には視点の高さ H が r に等しい場合、左半分には H が $r/2$ に等しい場合を示した。

4. 2 例 題 B

建物群にとりかこまれた丁字状道路に立てられた球面鏡の鏡像を求める。

図8にその配置を示す。図に示すように地上に x, y 軸、鉛直上方に z 軸をとる。建物群をブロックごとに B_1, B_2, B_3 とする。

図9にえらした鏡像図を示す。 X_i, Y_j, Z_k はそれ

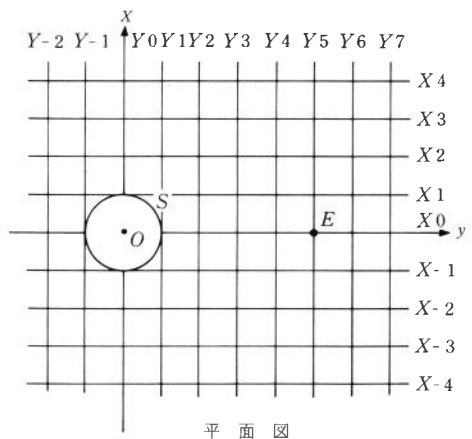
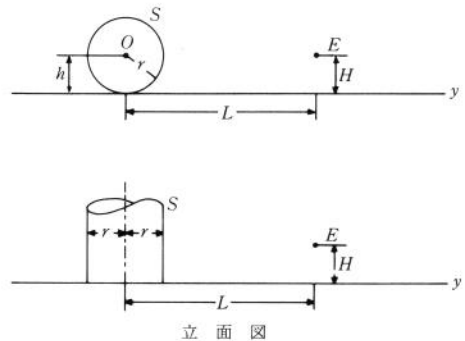


図5 配置図(A)

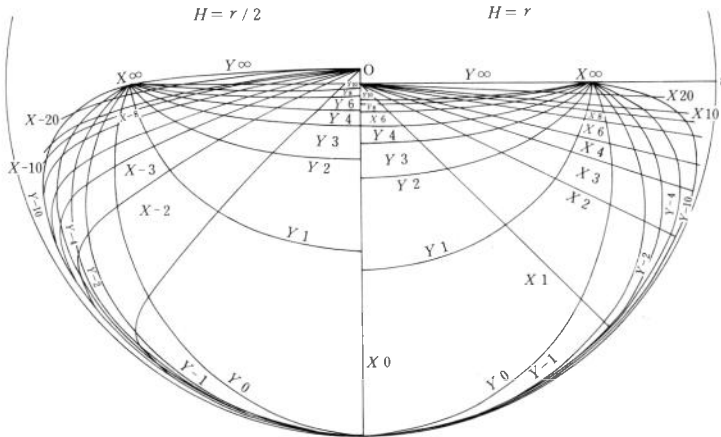


図6 基盤目状道路の球面鏡像

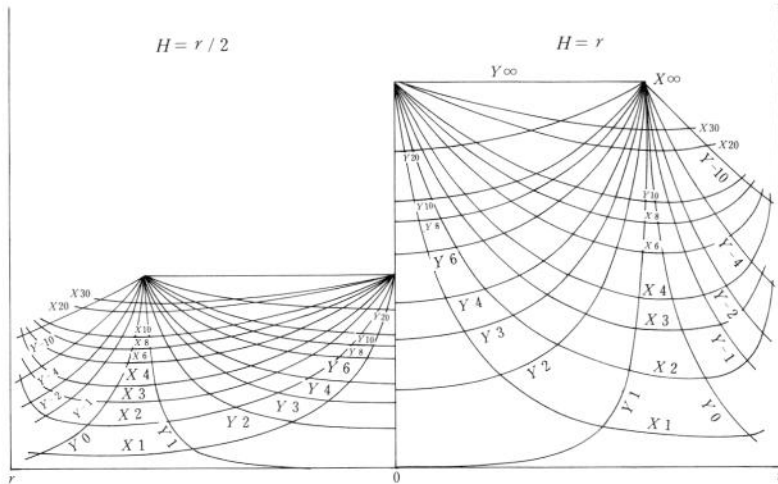


図7 基盤目状道路の円筒面鏡像

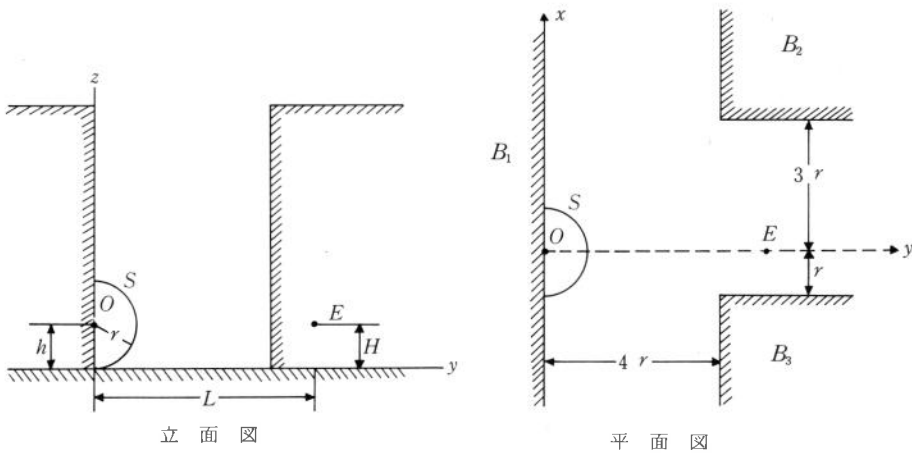


図8 配置図(B)

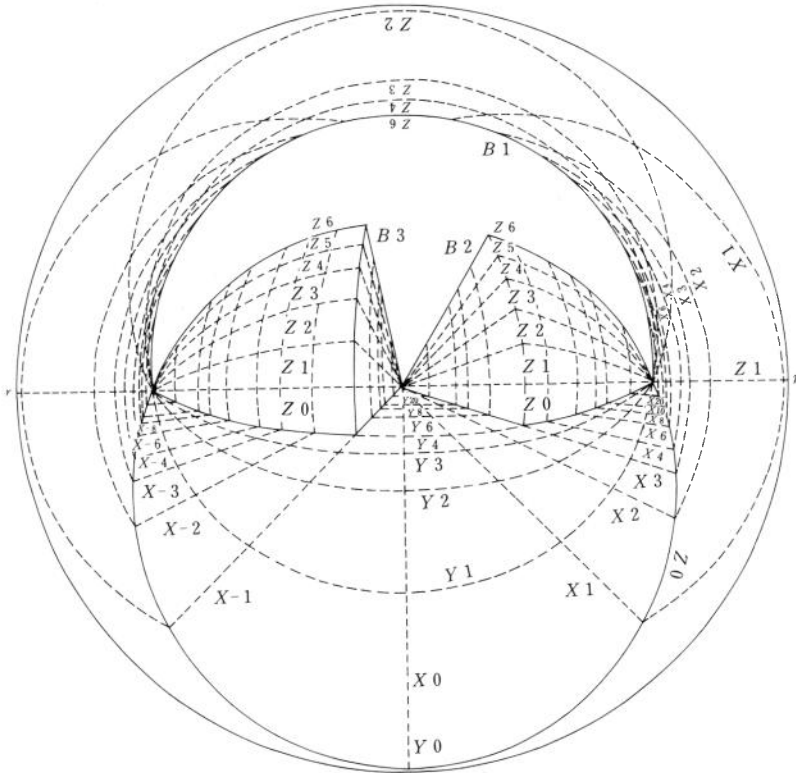


図9 T字状道路および建物群の球面鏡像

ぞれ $x=ir$, $y=jr$, $z=kr$ の直線を示す ($i, j, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

5 考 察

- (1) 図6, 7および9の鏡像図はコンピュータを用いて数値解法で求めたもので、像点 (x, y, z) の (x, z) の値をとって図に示した。したがって投影図とは異なるが、その相違は微小である。
- (2) 球面鏡の場合、第2近似解(6)式で簡単に像をえがくこともできる。その結果は前記の数値解と非常に近似しており、実用上ほとんど支障はない。
- (3) 回転面鏡の像と空間の実像との間の方向関係は、
 1. 上下関係はほぼ一致する。
 2. 左右関係もほぼ一致する。
 3. 前後関係は反転する。

この第3の前後関係の反転が使用に際しての異和感または錯誤の最大原因になるものと思われる。

- (4) 道路鏡等に実用するにあたっては回転面全体を使用することは稀で、曲面の一部のみを使用するのが普通である。したがってその用途に応じて鏡面のどの部分を用いるのが最適かを判断することが実用上の重要な問題となるであろう。
- (5) 無限遠点 ($x_1 \rightarrow \infty$) の像点は、球面鏡の場合 (8) 式において $k=5$ として、($x=0.759r, z=0$) の点となる。円筒面鏡の像でも、 x はこれに等しいが、ただ z は視点の高さと同一となる。
- (6) 球面鏡でその球心 O が視点と同じ高さにあるときには、直線 ($X=const, Z=const$) の像はまた直線となる (図6および図9の右半参照)。
- (7) 円筒面鏡の場合には図7に見られるように視点の高さによって像が著しく変化する。したがって視点の高さが一定しないような用途には不向きではないかと考えられる。

6 あとがき

回転面鏡の像を求める理論解法および2, 3のその例解を示した。理論解が主眼点であるので実用面についてはほとんど触れなかった。なお当稿は本学客員教授近藤政市氏の示唆による所が大きかったことを付言し感謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) *Mirror Images* : David Emil Thomas, *Scientific American* (日本語訳: サイエンス, 2, 1981, 日本経済新聞社)
- (2) ベリスコープミラーシステムの開発, 佐藤 他, 自動車研究, 6, 1982