フライホイールに関する一考察

林　田　太　郎

要　旨

第2号に於てコーナリングホースに関する一考察を述べたが、自動車のフライホイールの慣性能率を計算すると相当大となるので、フライホイールの自動車全体の運動および応力についての影響を考えてみたいと思う。

図1に於て、半径、a厚み、l。

回転対称軸をζ軸にとる。

ρは密度とする。

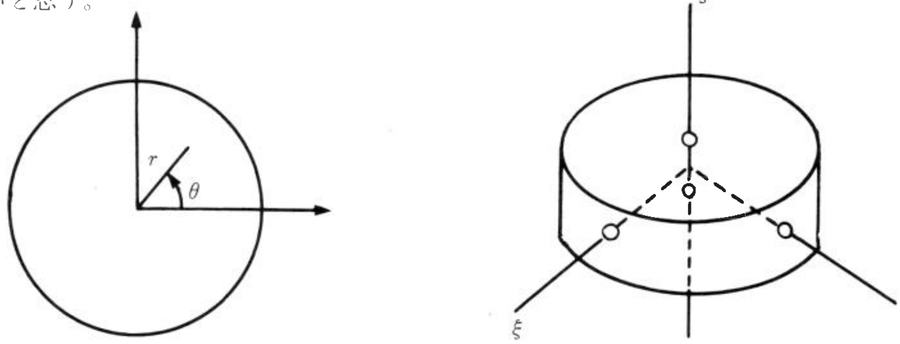

図1

$A=\int(\eta^2+\zeta^2)dm$

$C=\int(\xi^2+\eta^2)dm$　　　$A=B$

円柱座標を用いると、

$\xi=\gamma\cos\theta$、　$\eta=\gamma\sin\theta$、　$dm=\rho r\ dr d\theta d\zeta$

故に

$$A=\int(\eta^2+\zeta^2)dm=\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\int_0^{2\pi}\int_0^a(\gamma^2\sin^2\theta+\zeta^2)\rho r dr d\theta d\zeta$$

$$=\pi\rho a^2 l\left(\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$$

内柱の質量をMとすれば　　$M=\pi\rho a^2 l$

AとMとを用いて次のようなiを定義する。　　（iは$\sqrt{-1}$ではない）

$i^2=A/M$　　　すなわち

$i^2=\frac{a^2}{4}+\frac{l^2}{12}$　　　iは回転半径

$$C=\int(\xi^2+\eta^2)dm=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\rho r dr d\theta d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho a^4 l$$

$i^2=C/M=\frac{1}{2}a^2$

以上の計算から判断して自動車のフライホイールを薄い円柱体と仮定すれば相当の値となるの

で当然自動車全体の運動および内力に何等かの影響あることは考えられる。本文ではこの影響について考察してみたいのである。なお守屋富次郎先生の力学概論から引用した処多々あることをおことわりしておく。

1　緒　　言

実験の裏打がない。単に所見のみに終っている。御了解を乞う。仮定があるが、その都度文中で述べた方がわかりよいのでそのようにした。

2　理論解析

図2に示すよう剛体が一軸まわりの運動のみができるように束結されている場合を論じてみる。束縛軸上の一点を通って空間固定座標（x、y、z）をとり、またこれと原点を同じくして剛体に固定した座標（ξ、η、ζ）をとる。ζ 軸は束縛軸に一致させてとるものとする。

$$\frac{dP}{dt}=F \qquad (1)$$

但し、$m_i(d\,i/dt)$ は質点m_iの運動量で

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{dR_i}{dt}=P$$

は質点全体の運動量とする。

$$\frac{dH}{dt}=M$$

但し、$\sum_{i=1}^{n}\left(r_i\times m_i\frac{dR_i}{dt}\right)=H$

$$\sum_i\left(r_i\times F_i\right)=M$$

この剛体の運動方程式は

$$\frac{dP}{dt}=E+R \qquad (2)\text{の } 1.$$

$$\frac{dH}{dt}=M+S \qquad (2)\text{の } 2.$$

但しF、M、は剛体に作用する外力の合ベクトルおよび剛体に作用する外力の原点まわりに作るモーメントの合ベクトル。R、Sは束縛力の合ベクトル、およびその原点まわりにつくるモーメントの合ベクトル。図2でいえばζ 軸の両端のベアリング部に作用する束縛力にもとづくものである。ここにおいては$W\zeta=W\eta=0$。

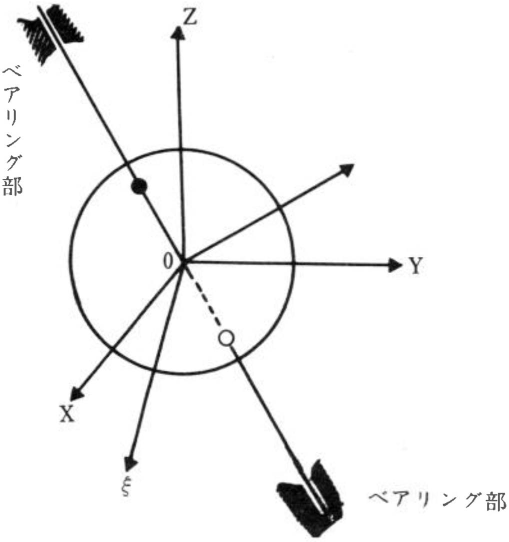

図2

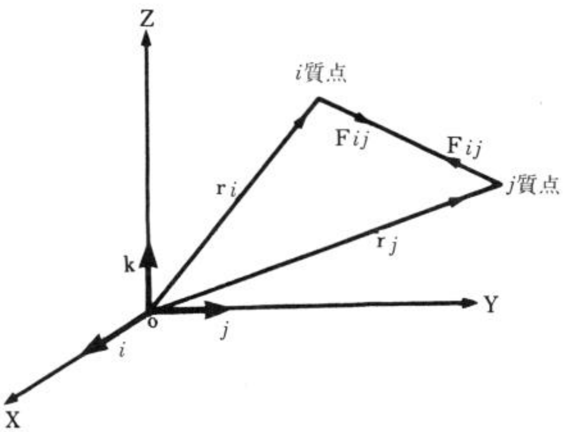

図3

$$\omega=\omega\zeta k' \qquad (3)$$

$$H=H\xi i'+H\eta j'+H\zeta k' \qquad (4)$$

但しi'、j'、k'はξ、η、ζ軸の単位ベクトル。　$H\xi = E W\zeta$、$H\eta = D W\zeta$、$H\zeta = C W\zeta$

但し、$A = \int(\eta^2 + \zeta^2)\,dm$、　$B = \int(\zeta^2 + \xi^2)\,dm$

$C = \int(\xi^2 + \eta^2)\,dm$　　$D = -\int \eta\zeta dm$

$E = -\int \zeta\xi dm$、　　$F = -\int \xi\eta dm$

ζ軸まわりの剛体の回転角をθとすれば

$$W\zeta = \frac{d\theta}{dt} \qquad (5)$$

いまMの成分を

$$M = M\zeta i' + M\eta j' + M\zeta k' \qquad (6)$$とする。

ζ軸は滑らかに束縛されて束縛力のモーメントSはζ軸方向には成分をもたないものとし

$$S = S\zeta i' + S\eta j' \qquad (7)$$とおく。

（M、Sともに剛体の重心まわりでなく、座標原点まわりのモーメントである。）

座標軸を剛体の慣性主軸にとれば

$$\begin{aligned} &\frac{dH\xi}{dt} + \omega_\eta H_\zeta - \omega_\zeta H\eta = M_\xi \\ &\frac{dH\eta}{dt} + \omega_\zeta H_\xi - \omega_\xi H_\zeta = M\eta \qquad (8) \\ &\frac{dH\zeta}{dt} + \omega_\xi H\eta - \omega_\eta H_\xi = M_\zeta \end{aligned}$$

$$D = E = F = 0$$

したがって、$H\xi = A\,\omega\xi$、$H\eta = B\,\omega_\eta$、$H\zeta = C\,\omega\zeta$　　(9)

(2)の２、をi'、j'、k'方向の成分に別けて書くと

$$\begin{aligned} &E\frac{d^2\theta}{dt^2} - D\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = M_\xi + S_\xi \\ &D\frac{d^2\theta}{dt^2} + E\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = M\eta + S_\xi \qquad (10) \\ &C\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_\zeta \end{aligned}$$

したがって$M_\zeta(t)$が与えられると、（これは振動等を研究するか実験等によって導き出される。実際問題としてはむつかしい。）10のξ式からζ軸まわりの運動θ(t)が定まり、これを(10)の第１式および第２式に代入すると束縛力のモーメントが定まる。

Rの決定法を述べる。

$$\begin{aligned} P = \int \frac{dr}{dt}\,dm &= \int(W \times r)\,dm \\ &= -\int(\eta dm)\,\omega_\zeta i' + \left(\int_\xi dm\right)\omega_\zeta j' \\ &= -M\eta c\,\omega\zeta\, i' + M\xi c\,\omega\zeta j' \end{aligned}$$

$M = \int dm$は剛体の質量であり、

$$\xi c = \frac{\int \xi dm}{M}、\qquad \eta c = \frac{\int y dm}{M}$$

は座標の重心の座標。

$$\frac{di'}{dt} = \omega \times i' = \omega_\zeta j'、\qquad \frac{dj'}{dt} = \omega \times j' = -\omega_\zeta i'$$

$$\therefore\quad \frac{dP}{dt} = -\left[M\eta c\frac{d^2\theta}{dt^2} + M\xi c\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]i' + \left[M\xi c\frac{d^2\theta}{dt^2} - M\eta c\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]j'$$

この式を(2)の１に代入しＦ、Ｒの成分を

$$\mathbf{F}=F\xi\mathbf{i}'+F\eta\mathbf{j}'+F\xi\mathbf{k}', \qquad \mathbf{R}=R\xi\mathbf{i}'+R\eta\mathbf{j}'+R\zeta\mathbf{k}' \text{とすると}$$

$$\begin{aligned}
-M\eta c\frac{d^2o}{dt^2}-M\xi c\left(\frac{do}{dt}\right)^2 &= F\zeta+R\xi \\
M\xi c\frac{d^2o}{dt^2}M\eta c\left(\frac{do}{dt}\right)^2 &= F\eta+F\eta \qquad (11) \\
O &= F_\zeta+Rc
\end{aligned}$$

したがって$M_\zeta(t)$が実験的あるいは理論的にわかれば、前述したように$\theta(t)$もわかる。$\theta(t)$が既知とすれば(11)から、束縛力R がわかる。R の決定には$M\xi c$, $M\eta c$,すなわち、ζ 軸からの重心のずれが関係してくる。（実際問題として自動車は左右対称であるとして重心からのずれはないと考えてよい。）

3 結　　論

(10)においてベアリング部（束縛点）の外力および外力によるモーメントを論じたが、以上述べた処で計算できるがこれはあくまでフライホィール、シャフト等が正常に回転していることを前提としたもので、操縦系統の振動（フラッター、ウォブル、シミー等）、又弾性振動、(主として車体のねじり振動、曲げ振動、動力伝達軸のねじり振動、走行による外乱によって起す過渡振動と機関回転による強制振動）はないものとして導き出し得るもので、$M\zeta(t)$、$\theta(t)$等はいづれも解析的には解くことはむつかしい。故に実験的に導き出さなければ(11)によるベアリング部の束縛力は導き出せない。又急旋回した場合は直進している処の慣性力がベアリング部にかかる。以上の条件を考えて用うるべきベアリングを決定しなければならない。又車軸の大きさも決定されなければならない。

又フライホールの大きさも決定されなければならない。

4 基礎理論

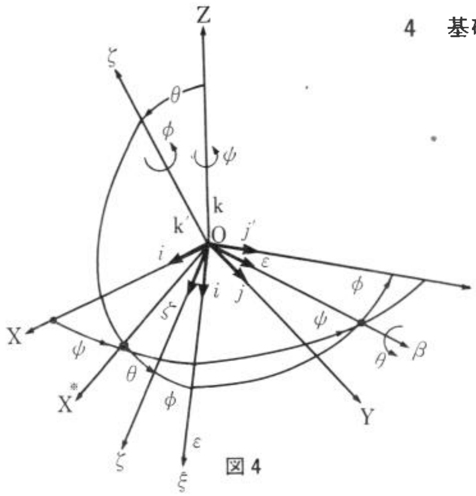

図 4

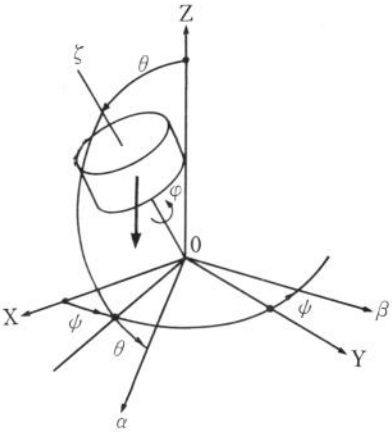

図 5

まづ、図 4 の説明をする。回転の順序を間違えたら意味がくるうので念の為説明しておく。

（x 、 y、z）をZ軸まわりにϕだけ回転し、（x、β、Z）次に（x、β、Z）をβ軸まわりにθだけ回転して、（α、β 、ζ ）次に（α、β、Z）ζ 軸まわりにϕ回転して（ζ 、y 、

ζ）に到達するものとする。i、j、K、及i'、j'、k'の他にα、β方向に置位ベクトル$\mathbf{e}_\alpha$、$\mathbf{e}_\beta$を記入してある。

$$\omega\xi=-\frac{d\psi}{dt}sin\theta\ cos\phi+\frac{d\theta}{dt}sin\phi$$
$$\omega\eta=\frac{d\psi}{dt}sin\theta\ \ sin\phi+\frac{d\theta}{dt}cos\phi \qquad (12)$$
$$\omega\zeta=\frac{d\psi}{dt}cos\theta+\frac{d\phi}{dt}$$

ジャイロはζ軸のまわりには回転対称であるので、ジャイロの角速度をωとすれば

$$\omega=\omega_\alpha\mathbf{e}_\alpha+\omega_\beta\mathbf{e}_\beta+\omega_\zeta\mathbf{k}' \qquad (13)$$
$$\omega\alpha=-\frac{d\psi}{dt}sin\theta、\qquad \omega\beta=\frac{d\theta}{dt}、$$
$$\omega\zeta=\frac{d\psi}{dt}cos\theta+\frac{d\phi}{dt} \qquad (14)$$

（α、β、ζ）座標系の角速度ベクトル$\omega\ \alpha\beta$は

$$\omega\alpha\beta=-\frac{d\psi}{dt}sin\theta\mathbf{e}_\alpha+\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\beta+\frac{d\psi}{dt}cos\theta\mathbf{k}' \qquad (15)$$

ジャイロのα、β、ζ軸まわりの角運動量は

$$A\ \omega\alpha=-A\frac{d\psi}{dt}sin\theta、\qquad A\ \omega\beta=A\frac{d\theta}{dt}、$$
$$C\ \omega\zeta=C\left(\frac{d\psi}{dt}cos\theta+\frac{d\phi}{dt}\right)$$

したがって角運動量ベクトルHは

$$\mathrm{H}=-A\frac{d\psi}{dt}sin\theta\mathbf{e}_\alpha+A\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\beta+C\left(\frac{d\psi}{dt}cos\theta+\frac{d\phi}{dt}\right)\mathbf{k}' \qquad (16)$$

(16)を用い、又Mの成分を$\mathbf{e}_\alpha$、$\mathbf{e}_\beta$、k'方向にとり

$$\mathrm{M}=M\alpha\mathbf{e}_\alpha+M\beta\mathbf{e}_\beta+M\zeta\mathbf{k}' \qquad (17)$$

運動方程式は

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt}+\omega\alpha\beta\times\mathrm{H}=\mathrm{M} \qquad (18)$$

あるいは、$-A\frac{d^2\psi}{dt^2}sin\theta-2A\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}cos\theta+c\left(\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt}=M\alpha$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left[c\frac{d\phi}{dt}+(c-A)\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right]\frac{d\psi}{dt}sin\theta=M\beta$$
$$c\frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right)=M\zeta \qquad (19)$$

ジャイロモーメントをKとすると(19)の符号を変えたものがKの値である。

回転対称なこまの運動を論じてみる。図5を参照してこまの接地点は固定点を原点にとり空間に固定した座標系（x、y、z）をとり、図4のようにオイラーの角をとる。こまの運動方程式は

$$-A\frac{d^2\psi}{dt^2}sin\theta-2A\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}cos\theta+c\left(\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt}=0$$
$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+\left[c\frac{d\theta}{dt}+(c-A)\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right]\frac{d\psi}{dt}sin\theta=Mgl\sin\theta$$
$$c\frac{d}{dt}\left(\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}cos\theta\right)=0 \qquad (20)$$

但し、Mはこまの質量、lは原点からこまの重心までの距離。

(20)の第3式より

$$\frac{d\phi}{dt}+\frac{d\psi}{dt}cos\theta=\Omega \qquad (21)$$

ただし、Ωは最初ζ軸のまわりに与えた角速度。

こまの心棒のまわりの角速度はϕ、ψ、θの如何にかかわらず、すなわち、どのような運動を

しても一定である。

(20)の第１式および第２式は次のようになる。

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}sin\theta+\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}cos\theta-\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}+\lambda\frac{d\theta}{dt}=0 \tag{22}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\psi}{dt}\frac{d\phi}{dt}sin\theta-\lambda\frac{d\psi}{dt}sin\theta=\frac{Mgl}{A}sin\theta \tag{23}$$

ここに　　$\lambda\equiv\frac{A-C}{A}\Omega$

(22)の両辺に$sin\theta$を乗じ変形すれば

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}sin^2\theta+2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}sin\theta\ cos\theta-\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{dt}sin\theta\ cos\theta$$
$$-\frac{d\theta}{dt}\frac{d\phi}{dt}sin\theta+\lambda\frac{d\theta}{dt}sin\theta=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}sin^2\theta\right)-\frac{d\theta}{dt}sin\theta\left(\frac{d\psi}{dt}cos\theta+\frac{d\phi}{dt}\right)+\lambda\frac{d\theta}{dt}sin\theta=0$$

これに(21)を代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}sin^2\theta\right)-\frac{d\theta}{dt}sin\theta\ (\Omega-\lambda)=0$$

$\Omega-\lambda=\Omega-\frac{A-C}{A}\Omega=\frac{C\Omega}{A}$　　であるから

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}sin^2\theta\right)+\frac{C\Omega}{A}\frac{d}{dt}(cos\theta)=0$$

積分して

$$A\frac{d\psi}{dt}sin^2\theta+c\Omega cos\theta=L \quad (一定) \tag{24}$$

Lは$t=0$のときの$d\psi/dt$ およびθの値から決定される。z軸まわりの角運動量を求めてみると、図５を参照して

$$-A\ \omega_\alpha sin\theta+C\omega_\zeta cos\theta=A\frac{d\psi}{dt}sin^2\theta+C\Omega cos\theta$$

(24)はz軸まわりの角運動量一定であることを表わしている。

(23)を積分するため(24)と(21)とから(23)は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{L-C\Omega cos\theta}{Asin^2\theta}\left(\Omega-\frac{L-C\Omega cos\theta}{Asin^2\theta}cos\theta\right)sin\theta$$
$$-\lambda\frac{L-C\Omega cos\theta}{Asin^2\theta}sin\theta=\frac{Mgl}{A}sin\theta$$

あるいは$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{L-C\Omega cos\theta}{Asin\theta}\right)^2=-\frac{d}{dt}\left(\frac{Mgl}{A}cos\theta\right)$

積分して$nutation$を求めると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{L-C\Omega cos\theta}{Asin\theta}\right)^2+\frac{Mgl}{A}cos\theta=k \quad (一定) \tag{25}$$

kも初期条件より決定される。

(25)を書き換えて

$$dt=\frac{sin\theta\quad d\theta}{\sqrt{(2k-\frac{2Mgl}{A}cos\theta)sin^2\theta-(\frac{L-C\Omega cos\theta}{A})^2}} \tag{26}$$

$cos\theta=U$　　なる置換を行うと(26)は

$$dt=\frac{-du}{\sqrt{(2x-\frac{2Mgl}{A}u)(1-u^2)-(\frac{L-C\Omega u}{A})^2}} \tag{27}$$

(27)の平方根内の関数を$\phi(u)$、すなわち

$$\phi(u)\equiv\left(2k-\frac{2Mgl}{A}u\right)(1-u^2)-\left(\frac{L}{A}-\frac{C\Omega}{A}u\right)^2$$

とおくと、一般に$\phi(u)=0$の根は三つあるから、これを図６のように小さい方からu_1、u_2、u_3とすれば

$$\phi(u)=\frac{2Mgl}{A}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \qquad (28)$$

$u=u_1+(u_2-u_1)^2$という変換を行って、変数をuからvに変えると(27)は

$$dt=\frac{-2\,dv}{\sqrt{\frac{2Mgl}{A}(u_3-u_1)}\ \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

或は$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2Mgl}{A}(u_3-u_1)}$

$$dt=\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad (29)$$

ここに　$k^2\equiv\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}<1$

(29)を積分して

$$v=sn\left(-\sqrt{\frac{Mgl}{2A}(u_3-u_1)}\ t-C\right)$$

cは初期条件から決定される。　snは寄関数。ゆえに

$$v=-sn\left(\sqrt{\frac{Mgl}{2A}(u_3-u_1)}\ t+C\right)$$

変数vをもとのθにもどすと

$$\frac{\cos\theta-u_1}{u_2-u_1}=sn^2\left(\sqrt{\frac{Mgl}{2A}(u_3-u_1)}\ t+C\right) \qquad (30)$$

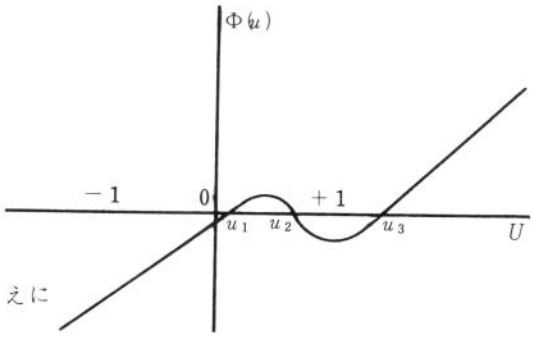

図6

$\phi(u)$は前述したがこの値が負ならば意味がなく、$u=\cos\theta$であるから　$-1\leqq u\leqq+1$でなければ意味がない。すなわち、図6でみる通り$u_1=\cos\theta_1$、$u_2=\cos\theta_2$とすれば　θはθ_1とθ_2との間に周期運動をする。　sn関数は

$$K=\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

$sn^2(\quad)$は2Kの周期をもつ。θ増減の一周期の時間Tは

$$T=\frac{2k}{\sqrt{\frac{Mgl}{2A}(u_3-u_1)}} \qquad (31)$$

(24)から得られるところの

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{L-C\Omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}\quad と \quad (26)とから$$

$$d\psi=\frac{L-C\Omega\cos\theta}{A\sin\theta}\ \frac{d\theta}{\sqrt{\left(2k-\frac{2Mgl}{A}\cos\theta\right)\sin^2\theta-\left(\frac{L}{A}-\frac{C\Omega}{A}\cos\theta\right)^2}} \qquad (32)$$

$\cos\theta=u$なる変換のとき

$$\frac{du}{d\theta}=-\sin\theta \qquad \therefore\quad d\theta=-\frac{du}{\sin\theta}$$

したがって(32)は次の形になる。

$$d\psi=-\frac{L-C\Omega u}{A\sin^2\theta}\ \frac{du}{\sqrt{A\sin^2\theta}}$$

ここで　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-u^2$より結局(32)は

$$d\psi=-\frac{L-C\Omega u}{A(1-u^2)}\ \frac{du}{\sqrt{\left(2k-\frac{2Mgl}{A}u\right)(1-u^2)-\left(\frac{L-C\Omega u}{A}\right)^2}} \qquad (33)$$

$$\Phi(u)=\left(2K-\frac{2Mgl}{A}u\right)(1-u^2)-\left(\frac{L-C\Omega u}{A}\right)^2$$

とおいて前と同じ議論をくりかえして

$$\Phi(u)=\frac{2Mgl}{A}(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

$$0<u_1<u_2<1<u_3$$

したがって(33)は

$$d\psi=-\frac{L-C\Omega u}{A(1-u^2)}\ \frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}} \qquad (34)$$

そこで$\frac{C\Omega u-L}{A(1-u^2)}$を部分分数に直して

$$\frac{C\Omega u-L}{A(1-u^2)}=-\frac{C\Omega+L}{2A}\frac{1}{1+u}+\frac{C\Omega-L}{2A}\frac{1}{1-u} \qquad (35)$$

(34)、(35)を結びつけて結局

$$d\psi=-\frac{C\Omega+L}{2A}\frac{1}{1+u}\frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}}+\frac{C\Omega-L}{2A}\frac{1}{1-u}\frac{du}{\sqrt{\Phi(u)}}$$

簡単のために　$p=-\frac{C\Omega+L}{2A}$、　$q=\frac{C\Omega-L}{2A}$とおけば

$$d\psi=p\frac{du}{(1+u)\sqrt{\Phi(u)}}+q\frac{du}{(1-u)\sqrt{\Phi(u)}} \qquad (36)$$

そこで次の変換を考える。

$$u=u_1+(u_2-u_1)v^2$$

そのとき　$\frac{du}{dv}=2(u_2-u_1)v$　　　$\therefore\ du=2(u_2-u_1)vdv$　　(37)

そして　$u-u_1=(u_2-u_1)v^2$

$$u-u_2=(u_1-u_2)+(u_2-u_1)v^2$$
$$=(u_2-u_1)(v^2-1)$$
$$u-u_3=u_1-u_3+(u_2-v_1)v^2$$
$$=(u_3-u_1)\left\{\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}v^2-1\right\}$$

$k^2=\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$とおけば　$0<k^2<1$で結局

$$\Phi(u)=(u_2-u_1)^2(u_3-u_1)v^2(1-v^2)(1-k^2v^2) \qquad (38)$$

(36)、(37)、(38)より

$$d\psi=\frac{P}{\sqrt{u_3-u_1}}\frac{2}{1+u}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}+\frac{q}{\sqrt{u_3-u_1}}\frac{2}{1-u}\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad (39)$$

しかるに　$1+u=(1=n_1)+(u_2-u_1)v^2$

$$=(1+u_1)\left\{1+\frac{u_2-u_1}{1+u_1}v^2\right\}$$
$$1-u=1-u_1-(u_2-u_1)v^2$$
$$=(1-u_1)\left\{1-\frac{u_2-u_1}{1-u_1}v^2\right\}$$

ここで　$m=\frac{u_2-u_1}{1+u_1}$、　$n=\frac{u_2-u_1}{1-u_1}$とおけばいづれも

$1>m、n>0$　$(\because u_1<u_2<1)$

以上より(39)は次のようになった。

$$d\psi=\frac{2p}{\sqrt{u_3-u_1}(1+u_1)}\frac{dv}{(1+mv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}+\frac{2q}{\sqrt{u_3-u_1}(1-u_1)}\frac{dv}{(1-nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad (40)$$

したがって次の楕円積分に帰着された。

関数Snuはk（(II)におけるk）にも依存しているから

$z=sn(u、k)$　　とかくこともある。

snuは複素平面上の有理型関数。kがきまればqがきまりしたがって、ϑiがきまりsnuがきまるので、

(IV) ϑ関数の性質から$z=sn(u、k)$は次の非線型常微分方程式をみたしている。

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2=(1-z^2)(1-k^2z^2)$$

初期条件は$u=0$で$z=0$　　かつ　$\frac{dz}{du}=0$

（注：このことを確めるには面倒な計算を続行しなければならない。但し理論は簡単である。よって省略する。）

(V)　τを次のようにきめておく

$q=e^{\tau\pi i}$　　　（qは(I)におけるq）

さらにK、K'を次のようにきめておく。

$2K=\pi[\vartheta_3(o)]$、$2ik'=\pi\tau[\vartheta_3(o)]^2$

そのとき(III)におけるsnuは$4K$、$2iK'$を基本周期としてもつ。すなわち

$sn(u+4K)=snu$、　$sn(u+2iK')=snu$

(VI)　関数snuの値域の状況は

$$\int_0^v\frac{dv}{(1+cv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}\qquad(41)$$

但し、$0<k<1$、　$|c|<1$　したがって(41)を求める事に帰着した。

記号を変えて

$$\int_0^z\frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$ を求める。

そのためには色々な準備を要するが、友近普著、楕円関数論による。

(I)　任意に与えられた実数値qを固定して、qに対して複素平面上の関数　$D_1(v)$、$D_2(v)$、$D_3(v)$、$D_4(v)$を次のように定義する。

$$D_1(v)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,2q^{(n+\frac{1}{2})^2}sin(2n+1)\pi v$$
$$D_2(v)=\sum_{n=0}^{\infty}2q^{(n+\frac{1}{2})^2}cos(2n+1)\pi v$$
$$D_3(v)=1+\sum_{n=1}^{\infty}2q^{n^2}cos2n\pi v$$
$$D_4(v)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,2q^{n^2}cos2n\pi v$$

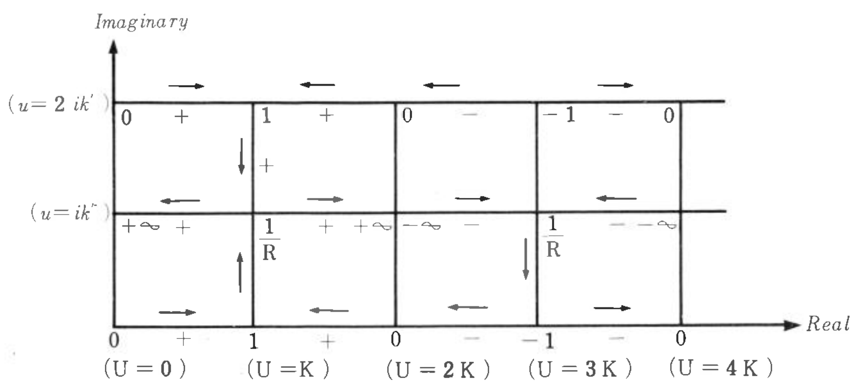

図７

以上４つの関数は整関数（vについて到る処正則）。

(II)　任意に与えられたk（$o<k<1$）について

$$k=\frac{[\vartheta_2(o)]^2}{[\vartheta_3(o)]^2}$$ となるように今后qをあらかじめ定めておく。

(III)　上記のϑ関数に対して、次の関数snuを次によって定義する。

$$snu=\frac{\vartheta_3(o)}{\vartheta_2(o)}\quad\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}$$

ここで＋、－はその実数値の正負を、又矢印（→）はその増加の向きを示す。

例えば、uが実数のときは

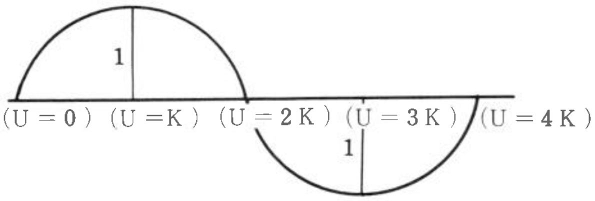

図８

すなわち、snuは実数軸で $snu=sin\frac{\pi}{2k}u$

いいかえればsnuは三角関数sinに対応している。

(VI)　(III)でsnuを定義したが仝様に

$$cnu=\frac{\vartheta_4(o)}{\vartheta_2(o)}\quad\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}\qquad dnu=\frac{\vartheta_3(o)}{\vartheta_4(o)}\quad\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)}$$

とおくと、cnuは三角関数cosに対応していて次の式が成立っている。

$$sn^2u+cn^2u=1$$

$$k^2sn^2u+dn^2u=1$$

さらに　　$\frac{d}{du}snu=cnu$、dnu

そして加法公式は

$$sn(u+v)=\frac{snu\ cnv\ dnv+snv\ cnu\ dnu}{1-k^2sn^2u\ sn^2v}$$

(VII)　Ⓗ（u）、$Z(u)$を次のように定義する。

Ⓗ　$(u)=\vartheta_4\left(\frac{u}{\pi[\vartheta_3(o)]^2}\right)$

$$z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

そのとき$z(u)$について次の加法公式が成立つ。

$$z(u)+z(v))-z(u+v)=k^2\ snu\ snv\ sn(u+v)$$

（以上(Ⅶ)、(Ⅷ)の結果は複雑な計算をするのみだから途中計算を省略した）

(Ⅸ)（Ⅱ)におけるqの定め方

$$\vartheta_2(o)=2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots\cdots)$$

$$\vartheta_3(o)=1+2q+2q^4+2q^9+\cdots\cdots$$

より $\sqrt{k}=\frac{2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots\cdots)}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots\cdots}$

となるようにqを求める。実際上かゝる計算は困難だから、次のような数値計算を行なう。

$$\left(\frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_3(o)}\right)^4+\left(\frac{\vartheta_4(o)}{\vartheta_3(o)}\right)^4=1 \quad より$$

$k^1=\left(\frac{\vartheta_4(o)}{\vartheta_3(o)}\right)^2$とおけば $\qquad k^2=1-k^2$

他方 $\vartheta_4(o)=1-2q+2q^4-2q^9+\cdots\cdots$より

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots\cdots}$$

$$\therefore k^1\doteqdot\frac{1-2q}{1+2q} \qquad \therefore q=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k^1}}{1+\sqrt{k}}$$

したがって近似的に

$q=\frac{1}{2}\frac{1-(1-k^2)^{1/4}}{1+(1-k^2)^{1/4}}$ とおけばよい。

さてここより本論に入る。

$\int_o^z\frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ (42) を求める。

$z=snu$ と変数変換すれば（Ⅶ）より

$$dz=cnu\cdot dnu\cdot du$$

$$1-z^2=cn^2v、\quad 1-k^2z^2=dn^2u$$

ゆえに(42)は $\int_o^u\frac{du}{1+nsn^2v}$

これを求めるのであるが簡単のため被積関数から1を引いて

$$\int_o^u\frac{-nsn^2udu}{1+n\ sn^2u}\cdots\cdots(43)$$

を求めることにする。aを次のように定める。

$sn^2a=-\frac{n}{k^2}$ $\qquad$ (k、nは(1)におけるもの)

したがって $n<o$のとき $sna=\sqrt{\frac{1n^1}{k^2}}$

$n>o$ $\quad sna=i\sqrt{\frac{n}{k^2}}$

このようなaがあることはsnの値域（Ⅵ）を見ればわかる。

$\therefore$ (43)は $\quad k^2sn^2a\int_o^u\frac{sn^2udu}{1-k^2\ sn^2a\ sn^2u}$ $\qquad$ (44)

これに定数$\frac{cna\cdot dna}{sna}$をかけて

$$\pi(u、a)=k^2sna\ cna\ dna\int^u\frac{sn^2\ udu}{1-k^2sn^2\ asn^2u} \qquad (45)$$

とおく。

snuの加法公式（(Ⅶ)より）

$$sn(u+a)+sn(u-a)=\frac{2\,cn\,a\,dn a\,snu}{1-k^2 sn^2a\,sn^2u}$$

他方z関数の加法公式（(Ⅷ)より）

$v=a$、$-a$とおいて　snu、$z(u)$が共に奇関数なることに注意すれば

$$z(u)+z(a)-z(u+a)=k^2sn\,a\,snu\,sn\,(u+a)$$

$$z(u)-z(a)-z(u-a)=-k^2sn\,a\,snu\,sn\,(u-a)$$

$$\therefore\quad z(u-a)-z(u+a)+2z(a)$$

$$=k^2 sn\,a\,snu\left\{sn(u+a)+sn(u-a)\right\}$$

この式を(45)に代入して

$$\pi(u,a)=\frac{1}{2}\int_0^u\left\{z(u-a)-z(u+a)+2z(a)\right\}du$$

zの定義（(Ⅷ)より）

$$\pi(u,a)=\frac{1}{2}\int_0^u\left\{\frac{\Theta'(u-a)}{\Theta(u-a)}-\frac{\Theta'(u+a)}{\Theta(u+a)}+2z(a)\right\}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^u\left\{(\log\Theta(u-a))'-(\log\Theta(u+a))'+2z(a)\right\}du$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+uz(a)\qquad(46)$$

(44)、(43)にもどり

$$\int_0^u\frac{-n\,sn^2u\,du}{1+n\,sn^2u}=\frac{sn\,a}{cna\cdot dna}\quad\pi(u,a)$$

$$\therefore\quad\int_0^u\frac{du}{1+n\,sn^2u}=\int_0^u\left\{1+\frac{-n\,sn^2u}{1+n\,sn^2u}\right\}du$$

$$=u+\frac{sna}{cna\cdot dn\,a}\quad\pi(u,a)$$

以上より

$$\int_0^z\frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=u+\frac{sna}{cna\cdot dna}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}+uz(a)\right\}$$

ただし　$u=sn^{-1}z$

(47)のuと混同するから次のように書いておく。

$$\int_0^v\frac{dv}{(1+nv^2)\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}$$

$$=w+\frac{sna}{cna\cdot dna}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(w-a)}{\Theta(w+a)}+wz(w)\right\}$$

ただし　$w=sn^{-1}z$　　　　　(47)

そこで14頁(40)にもどる。a、bを次のようにとる。

$$sn^2a=-\frac{m}{k^2}、\ sn^2b=\frac{n}{k^2}$$

$$\left(m=\frac{u_2-u_1}{1+u_1}、\ n=\frac{u_2-u_1}{1-u_1}\right)$$

(47)より　$w=sn^{-1}v$とおけば

$$\psi(v)-\psi(o)=\frac{2p}{\sqrt{u_3-u_1}\,(1+u_1)}\left[w+\frac{sna}{cna\cdot dna}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(w-a)}{\Theta(w+a)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+wz(w)\right\}\right]+\frac{2q}{\sqrt{u_3-u_1}\,(1-u_1)}\left[w+\frac{snb}{cnb\cdot dnb}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(w-a)}{\Theta(w+a)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+wz(w)\right\}\right]$$

$u=u_1+(u_2-u_1)\,v^2$であったから　$v=\sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}}$を前式に代入して$n=\cos\theta$とおけば$\psi(\theta)$の関係式が表わせたことになる。以下原点に中心をおく球面上にこまの心棒の描く軌跡によって記

述する。

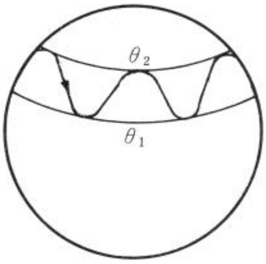

図9・1

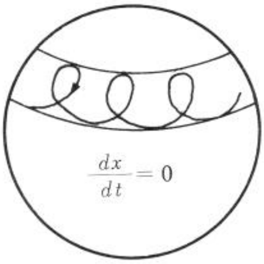

図9・2

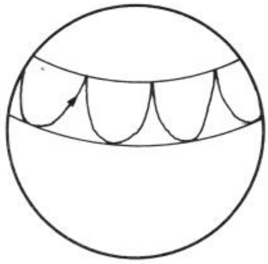

図9・3

$u=u_1$および$u=u_2$において、すなわちθが最大値と最小値をとる点においては(33)からわかるように

$$\frac{d\theta}{d\psi}=0$$

であるから心棒の軌跡はθ_1＝一定、θ_2＝一定なる2小円に接する。（図9・1）

しかし12頁$\frac{d\psi}{dt}=\frac{L-C\Omega cos\theta}{As in^2 t}$からわかるように

$L-C\Omega cos\theta=0$(48)を満足するθの値がθ_1とθ_2との間にあるときにはθ_2に於て、$d\psi/dt$は負値になるから運動の向きは逆になり、図9・2に示すように$loop$を描く。

(48)を満足するθがちょうどθ_2に等しいような特別の場合には、$\theta=\theta_2$における軌跡は図9・2に示すように$cusp$となる。これら種々の運動の形は初期条件の与え方と慣性能率A、Cの大きさによって定まってくる。

$\Phi(u)$の根が等根の場合、すなわち$u_1=u_2$の場合にはこまの軸はθ＝一定なる小円を描く。

そして$\frac{d\psi}{dt}=\frac{Z-C\Omega cos\theta}{As in^2\theta}cos\theta$

でわかるように$\frac{d\psi}{dt}$＝一定、すなわち定常歳差運動を行う。

なお(28)に於て$\Phi(-\infty)=-\infty$、$\Phi(-1)<o$、$\Phi(+\infty)=+\infty$である。$u=cos\ \theta$であるから

$-1\leqq u\leqq+1$　であり、（－1、＋1）の間に$\Phi(u)$が正値をとる領域がなければならない。このような考案より、$\Phi(u)$の根、u_1、u_2、u_3は図9・1に示すように$-1<u_1$、$u_2<+1+1<u_3$となることがわかる。以上のこと附記しておく。

5　理論解析

自動車の進行方向をy軸に、上方をz軸にとる。任意の座標系に関する慣性能率、慣性相乗積は全質量が重心に集まったと仮定した場合の慣性能率、慣性乗積と重心を通りもとの座標軸に平行な座標軸に関する慣性能率、慣性乗積の和に等しいから座標の原点はいづれにとってもよいが、問題を簡単にするため次の仮定をおく。

1、自動車のフライホイール前部分のみの重心はフライホイールの前にあって固定されている。原点を重心にとる。

２、クランクシャフトは一本の曲っていないシャフトにおきかえる。すなわち心棒と考える。

３、ブレーキをかけたとき、すなわちクラッチを切ったときは自動車のクラッチ前方とクラッチ後方とは切りはなされたものとする。

４、心棒の質量はないものと考える。勿論慣性能率、慣性相乗積は零と考える。

以上の仮定において大体の傾向はわかると思う。２の仮定について考えるが、クランクシャフトの寸法を決める公式は*beam*の理論から導き出されている。そして其値に適当な安全係数を乗じてある。これは全くの出鱈目でクランクシャフトを*beam*と仮定したのは大きなあやまりで形状は全くちがうのである。そこで適当な安全係数をかけて辻褄を合せている。(2)はそのような仮定とは全くちがうので傾向をさぐるには差支ない。

自動車等速進行中に前輪に横すべり角を与えても後方の駆動輪はその瞬間まだ慣性により方向を変えない。この時のジャイロモーメントの作用による車輪の地面を圧したり、地面より浮いたりしてコーナリングホースに影響あることは前号で述べたが、その瞬間図９で示したような*nutation*が起ることを無視することできない。このことについて説明してみよう。

ブレーキをかけたらすなわち、クラッチを切ったら自動車全体は負の加速度を受けてすなわち摩擦力が負の方向に働き、静止する。

クラッチが離されてもフレーム等でフライホイール前方と後方とは連結されている。したがって自動車の運動系の中のフライホイールの運動と考えてよい。さすれば、図９のような*nutation*が起る。したがってその瞬間、クラッチ押板のフライホイールを押す力は偏心される。殊にブレーキをかけながら施回するとき、または地面の凹凸によって自動車が左右に動くときにはその傾向が著しい。又クラッチクリアランスも適当な値を与えないとクラッチ板の着脱が不完全になる。このことは実験、経験によって*maker*が決めているが、もつと理論的に結論を得ると思う。

６　結　　論

３に結論を述べたが、これはフライホイールのベアリング、リレーズベアリング、減速室のベアリング等に関して留意すべきことである。又ブレーキをかけたときのクラッチ板、およびクラッチクリアランスの影響について述べた。いづれにしても工学は実験を伴わなければならない。実験をやれば相当面白い結論が出ると思う。

なおクランクシャフトの不等速回転を等速回転にどれ位近づけ得るか、フライホイールの作用をも少し研究してみたい。（既にある程度計算、実験ずみで、本に書かれてはいるが)。文中、守屋先生の力学概論、友近先生の楕円関数論をしばしば引用したが、命題の性質上、止むを得なかった。基礎理論に多くの頁数を費したがこれも止むを得なかった。何卆御了解を願う。