

# コーナリングホースに関する一考察

林 田 太 郎

## 要 旨

コーナリングホースは完全に解析的に解明されていない。回転しながら回転面と $\alpha$ の角度をなす方向にタイヤが横滑りすると進行方向と逆向きの力Fのほか、速度Cという力が接地面を通じて地面からタイヤに作用する。此Cをコーナリングホースとっているが結局此は摩擦力で摩擦係数 $\mu_f$ と地面反力Pとの積、 $\mu_f P$ に外ならない。 $\mu_f$ はタイヤ表面の模様、空気圧、トレッド等に関係し、Pは自動車の自重、積載荷重に関係する。実験の結果、速度V、横滑り角 $\alpha$ にも関係する。図2により

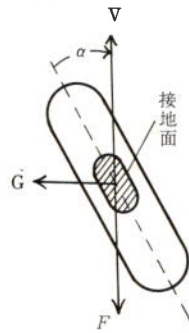


図 1

$$\text{運動方程式 } \frac{W}{g} V \frac{d\gamma}{dt} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

重心まわりの回転の運動方程式

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = (C_1 + C_2) I_1 - (C_3 + C_4) I_2 - M r_t$$

但し、W：自動車の重量

I：重心まわりの慣性能率

$C_1, C_2$ ：左右前輪のコーナリングホース

$C_3, C_4$ ：左右後輪のコーナリングホース

$M r_t$ ：車輪のころがり抵抗および駆動によるモーメント

このCがVおよび $\alpha$ に関係するというのは自動車のfly wheel、推進軸、車輪は回転体であるから旋回の際に生じるprecessionによる地面反力に及ぼす影響であるかと考えられる。この事について所見を述べ度い。尚コーナリングホースの着力点の位置によって舵の復元性について重大な命題があるがこの事については言及しない。定常旋回についてのみ述べる。

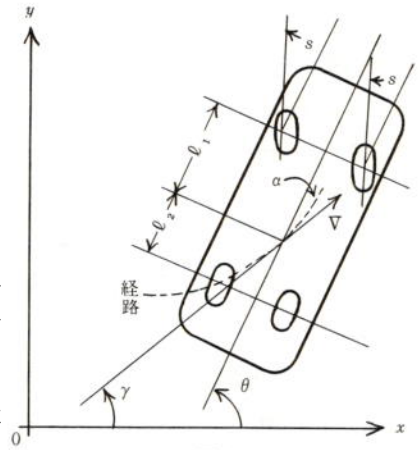


図 2

## 1. 緒 言

数式を簡単にするため色々な仮定をおいてある。そのため精密さを欠く。また時間の余裕がな

いため実験の裏打がない。単に所見のみに終わっている。残念ながら御了解を乞う。仮定は冒頭において示さず、其都度文中で説明した方がわかりよいのでそのようにした。

## 2. 理論解析

### 2・1 低速時の旋回

遠心力0, または進行速度0の旋回に当る。従ってコーナリングホースは不要である。

### 2・2 高速定常旋回に於ける仮定

論ずるに当り次の仮定をおく。

(1)路面は水平且つ平坦である。(2)遠心力によって車体が横揺れなどを起してもばね上部分の重心はばね下部分に対して移動しない。(3)前輪のかじ取角は左右の平均をもって代表させる。(高速度の旋回では左右かじ取角の差はわずかである。)(4)遠心力による荷重移動のため車輪には一般に外側へのキャンバ角が与えられ相当大きな影響があるが簡単のため無視する。(5)余剰馬力はないものとする。fly wheel, 推進軸, 前後輪は等速回転をするものとする。

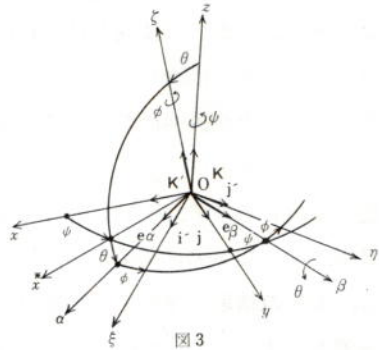


図3

### 2・3 Precessionの基礎理論

論ずるに当り先づ座標を決める。

最初( $\xi, \eta, \zeta$ )は( $x, y, z$ )と一致しているものとする。そして( $x, y, z$ )をz軸まわりに $\psi$ だけ回転し( $x^*, \beta, z$ )。次に( $x^*, \beta, z$ )を $\beta$ 軸まわりに $\theta$ だけ回転して( $\alpha, \beta, \zeta$ )。最後に( $\alpha, \beta, \zeta$ )を $\zeta$ 軸まわりに $\phi$ だけ回転して( $\xi, \eta, \zeta$ )に到達するものとする。 $x, y, z$ 軸方向の単位ベクトル $i, j, k$ ;  $\xi, \eta, \zeta$ 軸方向の単位ベクトル $i', j', k'$ ;  $\alpha, \beta$ 軸方向の単位ベクトル $e_\alpha, e_\beta$ である。

ジャイロの束縛点のまわりの運動方程式は

$$\frac{dH}{dt} = M \quad (1)$$

但し、 $H$ :角運動量

$M$ :外力のモーメント

束縛点を通して剛体の慣性主軸方向に $\xi, \eta, \zeta$ 軸をとりその方向の単位ベクトルを $i', j', k'$ ;  $\xi, \eta, \zeta$ 軸まわりの慣性能率を $A, B, C$ とすると、

$$H = A\omega_\xi i' + B\omega_\eta j' + C\omega_\zeta k' \quad (2)$$

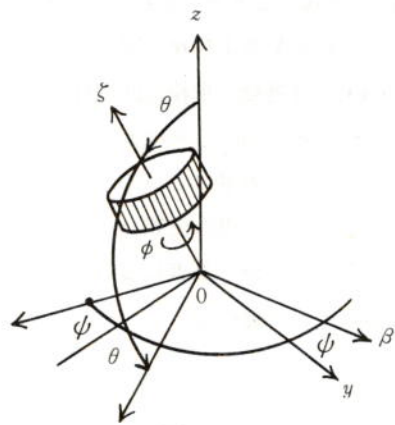


図4

但し  $W_\xi$ ,  $W_\eta$ ,  $W_\zeta$  は,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  軸まわりの角速度.

(1)を  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  方向の成分に分けると,

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_\xi}{dt} - (B-C) \omega_\eta \omega_\zeta &= M_\xi \\ B \frac{d\omega_\eta}{dt} - (C-A) \omega_\zeta \omega_\xi &= M_\eta \\ C \frac{d\omega_\zeta}{dt} - (A-B) \omega_\xi \omega_\eta &= M_\zeta \end{aligned} \quad (3)$$

(3)を解くため ( $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$ ) と図2で示したオイラーの角とを結びつけると

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \phi + \frac{d\theta}{dt} \sin \phi \\ \omega_\eta &= \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \phi + \frac{d\theta}{dt} \cos \phi \\ \omega_\zeta &= \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

ジャイロは  $\zeta$  軸のまわりに回転対称であるので次に示す運動方程式を導くことができる. ジャイロの角速度の  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$  軸方向の成分すなわち

$$\omega = \omega_\alpha \mathbf{e}_\alpha + \omega_\beta \mathbf{e}_\beta + \omega_\zeta \mathbf{k} \quad (5)$$

とオイラー角の間には,

$$\omega_\alpha = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta, \quad \omega_\beta = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega_\zeta = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\phi}{dt}, \quad (6)$$

( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\zeta$ ) 座標系の角速度ベクトル  $\omega_{\alpha\beta}$  は,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta \mathbf{e}_\alpha + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\beta + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \mathbf{k}' \quad (7)$$

$\mathbf{M}$ の成分を  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\beta$ ,  $\mathbf{k}'$  方向にとると

$$\mathbf{M} = M_\alpha \mathbf{e}_\alpha + M_\beta \mathbf{e}_\beta + M_\zeta \mathbf{k}' \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \omega \times \mathbf{H} = \mathbf{M} \quad (9)$$

あるいは,

$$\begin{aligned} -A \frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \theta - 2A \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + C \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) \frac{d\theta}{dt} &= M_\alpha \\ A \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[ C \frac{d\phi}{dt} + (C-A) \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right] \frac{d\psi}{dt} \sin \theta &= M_\beta \end{aligned} \quad (10)$$

$$C \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right) = M_\zeta$$

軸対称なジャイロの運動方程式である.

又  $\frac{d\phi}{dt}$  は大きいので,  $\frac{d\psi}{dt}$  を含まない項を無視して

$$C \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} = M_\alpha, \quad C \frac{d\psi}{dt} \frac{d\phi}{dt} \sin \theta = M_\beta, \quad C \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_\zeta \quad (11)$$

図5に於いて  $G'$  は自動車の重心,  $G'$  を原点にとる. 推進軸, fly wheelの重心を  $G$  とする.  $GG' = l$  とする. 前進方向を  $\zeta$  軸に, 上下方向を  $\beta$  軸にとる.  $\frac{d\psi}{dt} = \mu$ , のベクトルを  $\boldsymbol{\mu}$  とおけば

$$\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H} = \mathbf{M} \quad (12)$$

#### 2・4 自動車の車輪及推進軸等の Precession

定常旋回と仮定してある. 実際問題として操舵のときは  $\theta$  は変化しているし旋回中心は移動す

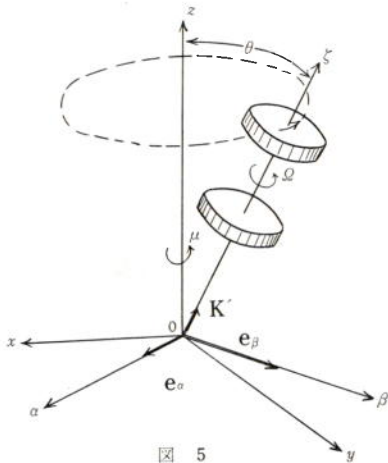


図 5

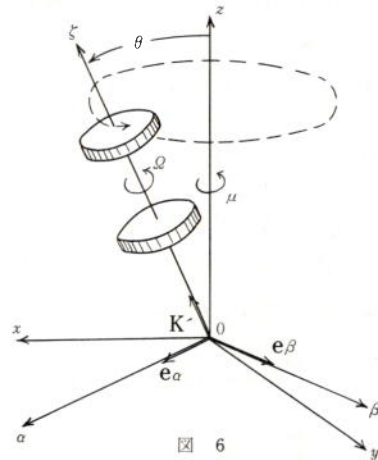


図 6

るが、筆者は此問題に取組んだがどうしてもうまく行かないし面倒であるので簡単のため定常旋回と仮定した。それでも大体の推定はつくし差支ない。図5及図6に於て自動車の前輪の旋回中心を原点0にとる。進行方向はx軸の負の方向にとり旋回中心を通って地面に鉛直方向をβ軸とする。左右前輪の質量の計をMとし重心は両輪の中心にあるものとする。

Mのα, β, ζ軸に関する慣性能率をA, B, Cとする。Mの原点, Oに関する角運動量のベクトルをHとする。前輪に働くモーメントのベクトル, これはβ軸方向であるがこれをMとすると

$$\frac{dH}{dt} = M, \text{ は(1)で示した通り.}$$

$$H = C(\Omega + \mu \cos \theta)k' - A\mu \sin \theta e_\alpha$$

$e_\alpha, e_\beta, k'$ はα, β, ζ軸方向の単位ベクトル。自動車は等速運動をしていると仮定してあるので、図5, 6のΩ, μは一定。

角速度μのベクトルをμとすると

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= C(\Omega + \mu \cos \theta) \frac{dk'}{dt} - A\mu \sin \theta \frac{de_\alpha}{dt} \\ &= [C\mu \sin \theta (\Omega + \mu \cos \theta) - A\mu^2 \sin \theta \cos \theta] e_\beta \\ &= \mu \times H = M \end{aligned} \tag{13}$$

此Mは舵によって前輪に与えたモーメントであって前頁の図によって明らかなように左旋回の場合はβ軸の正方向に右旋回の場合は負方向に働く。定常旋回であるからこのモーメントMも一定である。図2を参照して、左前輪の横すべり角をα<sub>1</sub>, 左後輪の横すべり角をα<sub>3</sub>, 重心の横すべり角をαとすれば,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + s - (\ell_1 \frac{d\theta}{dt} / V) \\ \alpha_3 &= \alpha + (\ell_2 \frac{d\theta}{dt} / V) \\ \alpha &= \theta - \gamma \end{aligned} \tag{14}$$

即ち前輪, 後輪, 重心の横すべり角は等しくはない。しかしそれ等の全部の横すべり角は等し

いものとしてまた後輪，すなわち駆動輪の横すべり角も等しいと仮定する．従って自動差動装置（デフ）も働いていないことになる．これ等の仮定をおくということは一見乱暴のように見えるがコーナリングホース， $\mu_f P$ のPに与える影響を論ずるについて一向には差支ないものと思う．

前述したMを原点を固定した動径r（rは旋回半径）で割るとPrecessionによる地面に対する力fが出る．その力は自動車の重量のに対する地面反力Pの変化になって表われる．しかしこれだけでは自動車の重心G'に於て自動車の重量Wとして，

$$W \pm \Delta W, \quad \text{左旋のときは-，右旋回のときは+}$$

この $\Delta W$ は微小なものといえる．従ってPに与える影響も微小なものである．図7は図5，図6と同じ符号を用いてあるが意味は全くちがう．自動車の前進方向に $\zeta$ 軸をとり，自動車全体の重心G'を通って鉛直方向に $\beta$ 軸をとる． $\zeta$ 軸まわりの回転角速度を $\Omega$ ，Z軸まわりの回転角速度を $\mu$ としてあるが， $\Omega$ は推進軸等回転体等の平均回転角速度である．符号は同じだが意味はちがう．前述したように定速旋回するとする．前後左右車輪及自動車の重心Gも同じすべり角 $\theta$ で旋回するものとする．又等速円運動をする場合は遠心力以外にCoriolisの力がある

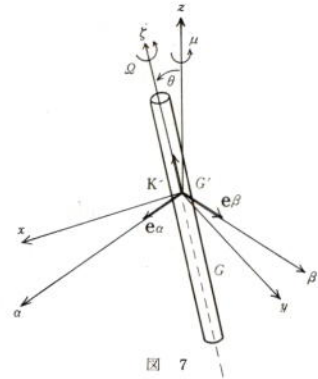


図 7

がこれは微小なため無視する．実際問題としてfly wheel，トランスミッションの主軸（副軸の回転は無視する．），推進軸の回転角速度は適当な減速比によってちがうがそれらの平均回転角速度を $\Omega$ とする．然らば $\zeta$ 軸方向の角運動量のベクトルをHとすれば  $\frac{dH}{dt} = \mu \times H = M$

此Mは操舵によって与えられるG'を原点とした $\beta$ 軸方向のモーメントのベクトルである． $\theta$ は図5，図6で示した $\theta$ の値と等しくなる．（幾何学的に等しいのであって実際は多少ちがう）．

このMを $l$ で割って力fを得る． $l$ は自動車重心G'より前方を正にとり後方を負にとる．このfについて考えてみることにしよう，GG'の間隔は短い．故にfは大となる．又推進軸は断面小であるが長い． $\alpha$ 軸， $\beta$ 軸の座標を $\alpha$ ， $\beta$ とすれば

$$A = \int (\alpha^2 + \beta^2) dm, \quad \text{但し } m \text{ は質量,}$$

Aは相当大きくなる．fly wheelは長さは短いが $\alpha$ ， $\beta$ は相当大きい．従ってAも相当大きい．

$$\frac{dH}{dt} = A \frac{d\omega_\zeta}{dt} = M, \quad \omega_\zeta = \Omega$$

従ってMを $l$ で割ったfは余り小さいとはいえない．従ってこのfが前後輪に影響してくる．前輪を圧せば後輪は浮くし前輪を浮かせれば後輪を圧す．勿論フレームと車軸の間にはスプリング及ショックアブソーバーがあるから此fは静的に働く．コーナリングホースは旋回中心に向う摩擦力であって遠心力と釣合うがこの力は前述したように $\mu_f P$ である．但し $\mu_f$ の値は1より小であるが相乗積であるからPに及ぼすfを無視することはできない．

### 3. 結 論

高速定常旋回の実用的計算法は設計者がよく用いて既に二、三ある。これ等を用いれば事足りるのである。しかし解析的に完全に解明されていない。又本や論文を見ると回転体のprecessionのコーナリングホースに対する影響を無視したものがあつた。以上述べた処で無視できないことがわかつた。仮定の中で左右前輪、左右後輪の横すべり角を等しいとおいたが高速定常回転では、その差はわずかである。差支ない。実際問題として横すべり角は旋回の途中に於て時々刻々変化しつつある。従つて旋回中心も時々刻々変化する此条件を入れると非常に面倒になり筆者はこの研究をしたが不学にして問題を解明できないで終つた。余暇を求めて解明したい。舵に与えるモーメントを常に一定にしたことは内心恥づかしいと思つた。尚旋回速度によつて遠心力は大きく変化する。遠心力は、 $m\omega v$ で旋回速度によつて大きくなるがコーナリングホースは其割合に大きくならないのでどうしても横すべりがあつたことを附記したい。前に述べたことによつてわかるように旋回半径小さい方が即ち $\theta$ が大きい方がコーナリングホースに与える影響大である。尚具体的な数値を入れて例えばfly wheelの質量はいくらか、推進軸の質量はいくらか、或は慣性率はいくらか計算していないので大胆なことはいへない。又実験の裏打がない。よつて単なる所見に止つてゐる。

尚エンジンのトルクの反力は小さいから無視してあつたことを附記しておく。