

短形孔の周辺に於ける応力についての一考察

昭和44年4月1日

林 田 太 郎

自動車の床板等には矩形状の孔がある。船の甲板上のハッチの如き大きいものこそないが、其周辺の応力について考察してみる。円孔、楕円孔については衆知であるし解明されている。

X, Yをx, y方向の外力, それによって生ずるx, y方向の応力を σ_x, σ_y , 剪断応力を τ_{xy} としそれによって起るx, y方向の変位をU, V, 歪を $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ (剪断歪)とする。

平衡方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

適合条件は

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (2)$$

Eをヤング率, γ をポアソン比とする。

応力函数 ψ を導入して

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (3)$$

とする。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ \delta_{xy} &= -\frac{2(1+\gamma)}{E} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

(4)を(3)なる 適合条件に代入すれば

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

(5)なる応力に相当する歪の成分が適合条件を満足するためには、函数 ψ は重調和函数でなければならない。

(5)の解法について述べる。

zの任意の函数にxまたはyをかけたものは重調和函数であって、(5)の解になる。

Zの任意の函数をF(z)とその実部及虚部を ξ, ζ とすれば

$$yF(z) = y(\xi + i\zeta)$$

上式をxまたはyについて2回微分すれば

$$\frac{\partial^2 (y\xi)}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 (y\zeta)}{\partial x^2} = yF''(z)$$

$$\frac{\partial^2 (y\xi)}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 (y\zeta)}{\partial y^2} = 2iF'(z) - yF''(z)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 (y\xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (y\xi)}{\partial y^2} + i \left\{ \frac{\partial^2 (y\zeta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (y\zeta)}{\partial y^2} \right\} = 2iF'(z)$$

上式の右辺はzの函数であるから左辺の実部及び虚部はそれぞれ平面調和函数になる。

従って $y\xi, y\zeta$ はいづれも重調和函数になる。

応力函数を

$$\psi = R \left[F_1(z) + y F_2(z) \right] \dots\dots\dots (6)$$

但し Rは実部を表す。

とおけば ψ は (5)の一般解になる。

$$(6)から \quad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y^2} = R \left[-F_1''(z) + 2iF_2'(z) - y F_2''(z) \right]$$

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \delta y} = I \left[-F_1''(z) + iF_2'(z) - y F_2''(z) \right]$$

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x^2} = R \left[F_1''(z) + y F_2''(z) \right]$$

Iは虚部を表す。

上の関係を (3)に代入すれば

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} = -2F_1'(z) + 2iF_2'(z) - 2y F_2''(z)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = R \left[2i F_2'(z) \right]$$

となる。

$$2iF_2'(z) = f_1(z), \quad -2F_1'(z) + 2iF_2'(z) = f_2(z)$$

とおけば平面応力は一般に次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} &= i y f_1'(z) + f_2(z) \\ \sigma_x + \sigma_y &= R [f_1(z)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$f_1(z) = \frac{A}{2} Z^2, \quad f_2(z) = B Z^2 \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} &= i y f_1'(z) + f_2(z) \\ &= B x^2 - (A+B) y^2 + (A + 2B) x y i \end{aligned}$$

$$R \left[f_1(z) \right] = \frac{A}{2} (x^2 - y^2)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{A}{2} (x^2 - y^2)$$

即ち
$$\sigma_x = \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) x^2 - \left(\frac{\beta}{4} A + \frac{B}{2} \right) y^2$$

$$\sigma_y = \left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) x^2 + \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{2} \right) y^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\tau_{xy} = -\left(\frac{A}{2} + B \right) x y$$

各 σ_x , σ_y , τ_{xy} を一定とおけば上式は楕円, 直角双曲線となる。

此ことから以上の双曲線の頂点以外の処では σ_x , σ_y , τ_{xy} を一定にとれば各の曲線は垂直に交わる。

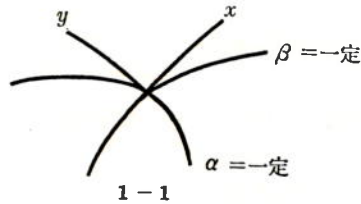
又直交曲線座標を用いてみる。

$$Z = C \cosh w, \quad \text{即ち} \quad x = C \cosh \delta \cos \beta, \quad y = C \sinh \delta \sin \beta \quad \text{はそれぞれ焦点を共}$$

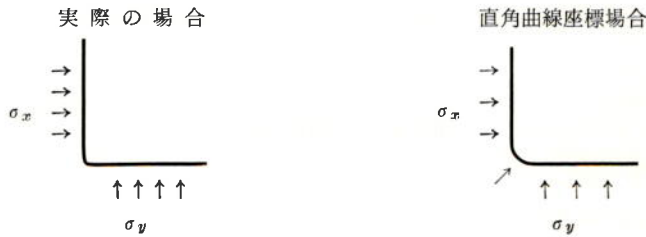
有する。楕円及び双曲線を表わす。

$$\frac{x^2}{(C\cos\beta)^2} - \frac{y^2}{(C\sinh\beta)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(C\cosh\delta)^2} + \frac{y^2}{(C\sinh\delta)^2} = 1$$



$\delta = \text{一定}$ $\beta = \text{一定}$ において その交点を原点にとり原点に於ける $\beta = \text{一定}$ の接線を x 軸
 $\delta = \text{一定}$ の曲線の接線を y 軸にとって考えてみると、頂点附近以外の処では σ_x, σ_y の方向は直角
 であるが頂点附近では実際の場合と異なる。



よって矩形孔の頂点を円形として、その頂点附近の応力について考えてみる。

円孔の場合は衆知の通り(7)に於て

$$f_1(z) = \frac{A}{z}, \quad f_2(z) = \frac{B}{z} \quad \text{とおく}$$

$$\text{そして} \quad \sigma_x = -\frac{A_x y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(A+B)x}{2(x^2 + y^2)}$$

$$\sigma_y = \frac{A_x y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(A-B)x}{2(x^2 + y^2)}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\tau_{xy} = \frac{A(x^2 - y^2)y}{2(x^2 + y^2)^2} + \frac{B y}{2(x^2 + y^2)}$$

$$r \rightarrow 0$$

となり

$x = a \cos\theta, \quad y = a \sin\theta$ とおき原点に特異点をもっているとして、円孔の縁の応力を求めている。

$$x \text{ 方向に作用する力は } \int_0^{2\pi} (-\sigma_x \cos\theta - \tau_{xy} \sin\theta) a d\theta = \pi B$$

$$\text{但し} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{1}{2a} (A \cos 2\theta + B) \cos\theta \\ \sigma_y = \frac{1}{2a} (2A \sin 2\theta + A - B) \cos\theta \\ \tau_{xy} = \frac{1}{2a} (A \cos 2\theta + B) \sin\theta \end{array} \right.$$

y 方向に作用する力は

$$\int_0^{2\pi} (-\tau_{xy} \cos\theta - \sigma_y \sin\theta) a \, d\theta = 0$$

そして円孔の半径が 0 に近づいた極限を考えて x 方向に集中力が働く場合に無限に大きい板に生ずる応力で、単位の板厚に作用する集中力の大きさを P とすれば

$$B = -\frac{P}{\pi} \text{ として}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \gamma\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \gamma\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\gamma)}{E} \tau_{xy}, \quad \text{但し} \quad \varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}$$

を積分して変位を求めたもの

$$U = \frac{(1+\gamma)A}{2E} \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{4E} \left\{ (1-\gamma)A + (1+\gamma)B \right\} \log(x^2 + y^2)$$

$$V = \frac{1+\gamma}{2E} \left\{ \left(\frac{2A}{1+\gamma} - B \right) \tan^{-1} \frac{y}{x} - A \frac{xy}{x^2 + y^2} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

円孔の場合 y 方向に作用する力が 0 となるので

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} = 0 \text{ において}$$

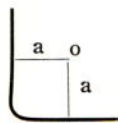
$$A = \frac{1}{2} (1+\gamma) B = -\frac{P}{2\pi} (1+\gamma)$$

と容易に求められる。

しかし(8)で明らかな如く $(x^2 + y^2)$ なる特異点を有していないので均質な材料の中にある矩形の応力となってしまふ。そこで矩形孔の中に材質が填充されているものと考えれば即ちふたが填充されているものと考えれば理論上のあやまりはない。(8)で明らかなように

$$-\tau_{xy} = \left(\frac{A}{2} + B \right) xy \text{ であるから}$$

矩形孔の周囲は剪断応力は一定と考えてよい。実際問題として矩形孔のふたにはフェルトゴム等を入れて剪断力に耐えるようにする。



図のような $\frac{1}{4}$ 円周にかかる

応力の総和を計算してみよう。

矢張り円孔の周辺の集中応力を計算したもの

同じく (7) に於ける $f_1(z) = \frac{A}{Z}$, $f_2(z) = \frac{B}{Z}$ において π から $\frac{\Sigma}{2}\pi$ まで積分してみる。

x 方向にかかる力は

$$\int_{\pi}^{\frac{\Sigma}{2}\pi} (-\sigma_x \cos\theta - \tau_{xy} \sin\theta) a \, d\theta = -\frac{B}{4}\pi + C_1$$

y 方向にかかる力は

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (-\tau_{xy} \cos\theta - \sigma_y \sin\theta) a d\theta = -\frac{A}{2} + C_2$$

C_1, C_2 なる積分常数があるとして考えてみる。

勿論 C_1, C_2 は単なる常数ではない。

C_1 及 C_2 は上の周辺条件と異なる。つまり上の方程式にあてはまらない不確定のものであって、 C_1 は y 軸に平行な面に働く応力の影響を受けるもの、 C_2 は x 軸に平行な面に働く応力の影響を受けるもので之は実験をしてその値を出さなければならないものである。上の方程式は $\frac{1}{4}$ 円周のみに力が作用したもので他に全然力が作用していないことを表わしている。

即ち x, y 軸に平行な面は全然上記の周辺条件を満足していない。

よって x 方向の力を P_x 、 y 方向の力を P_y とすれば

$$B = -\frac{4(P_x - C_1)}{\pi}$$

$$A = -2(P_y - C_2)$$

C_1 及 C_2 は単なる積分常数ではなく楕円孔のふちの応力は短軸と長軸との比に関係すること及び色々な実験データを見て考えると曲率半径、換言すれば半径 a を含む函数で与えられるものと考えられる。即ち x 方向にかかる力は

$$-\frac{B}{4}\pi + \varphi_1(a)$$

y 方向にかかる力は

$$-\frac{A}{2} + \varphi_2(a)$$

此 $\varphi_1(a), \varphi_2(a)$ は a の他に何かを含むかもわからないが常識的には確実に a のみは含むと考えられる。之を実験によって求めたい。

実験の方法及実験装置は簡単ではあるが非常に時間と手間をとるので此度は割愛することにした。

また別に理論より φ_1 及 φ_2 なる函数を見出し得られるかもわからない。

理論的にも研究してみたい。