古典弾性体論の現実へのアプローチ

(The Lenear Transformation of Elliptical Elasticity)

遠　藤　貞　一

1. 緒　　論

完全弾性体論 —— The Theory of Elasticity —— は Newton 以後の古典物理学の初期に於て Lagrange, Euler 等によって発見され，Lord Rayleih, Love 等によって，弾性振動論を含めて，その基本は完成されて来たと云える。

この完全弾性体論は，応力と歪とは比例関係にあるとする所謂フックの法則をその基本におくものである。

この古典物理学は，その後工学者の手に移るに及び，構造物の弾性論，特に最近航空機の発達に伴い，薄板理論の発達を促進し，車輌，造船，建築構造物等にも，基本的に極めて重要な役割を果して来た。

併し現実に実在する弾性物質，乃至材料は，極めて古き古典物理学の時代から，完全弾性体実在の問題は，否定されつづけて来たのである。即ち現存する材料は，それが如何なる小歪に於ても，決して完全弾性体ではあり得ないと認められて来た。そしてその弾性の不完全さの性格に対しては，実に多くの疑問が，複雑な問題として，長い歴史を経過して来ているのである。

先づ金属材料の弾性的性質に関しては1889年Ewing[1]は非常に小さい繰返し応力に於ても，完全な弾性は存在しないこと，及びその弾性履歴は，金属の性質として承認されねばならないことを示した。当時はその繰返し数も少かったが，併しそれも 1910 年から 1923 年頃の Bairstow, Gough, Mayson 及び Heigh等の疲労に関する研究により，その所謂弾性限内に於ては，如何にその繰返数を増加しても，遂に真実の弾性状態は得られないことを示した。

この弾性の不完全さは，一般にあまり簡単なものではなく，それは応力の繰返数によっても変わり，このことは夙に1881年 Baushinger によっても証明された。現在では，かかる点に就ては一般に応力繰返しの初期に於ては，内部摩擦の仕事は，一部材料組織の変化に費され，残りが熱になるものと認められている。[2]

併し鋼等に於ては，応力の繰返数が進むに従って（10^6，10^7程度），組織変化に費される仕事は，殆ど消失して，内部摩擦の仕事と発熱量とが一致する安定な状態に至る。この状態に於て残る内部摩擦を，安定な内部摩擦と呼ぶ。

さて物質にかかる内部摩擦があれば，その振動に於ては，勿論その自然振動を減衰せしめ，又共鳴振動の振幅を制限する。従って振動問題に関聯して，かかるものが振動方程式に如何なる形で導入せらるべきかという問題は，当然起るべき問題でなければならぬ。

かかる点に就て初めてその取扱いを提唱したのは，W. Voigt [2]であるが，これは既に1892年の事であった。そして彼はその内部摩擦を流体の速度比例型粘性と同様な観念に想定して，これを固体粘性と称した。この観念は理論的取扱いとしては，微分方程式の設定と解法に対して，特に便利容易な特長があるので，その後の多くの研究者が追随した。

そしてその実験的研究でも，この理論が成立つものとして処理せられたものがある。これに就ては我国では早く1921年，本多光太郎[3]が東北大学紀要に金属材料について発表した。

そしてこの場合は理論の当然の帰結として，繰返応力下に毎週期消費されるエネルギーは応力の二

乗に正比例し，且つ繰返し振動数に比例する。

所がこの性質がその後の多くの実験的研究者によって否定される結果となったのである。

先づ1926年，A. L. Kimball[4] 及び D. E. Lovell，O. Föppl[5] 其の他によって，その毎週期消費されるエネルギーは，その応力振幅の二乗には比例するが，併しその繰返振動数には比例せず，それには無関係である事実を発見した。

この性質は，其の後の他の実に多くの研究者によっても認められ，速度比例型内部摩擦は，少くとも第1近似に於て，完全に葬り去られたのである。

その後独逸のB. V. schlippe[6] は1935年（Ingeniuer Archiv）ゴム材料について，直接その応力一歪線図を光学的に描かせ，それは美しい楕円型弾性履歴曲線を描くことを見出した。そしてそのループは回転数には無関係で同じ路を描く。又振幅を変えたときの大小のループはすべてきれいな楕円型相似形である事実を発見した。そしてこの事実は内部摩擦の形態としては，正に金属の Kimball，Lovell型と完全に一致するのである。

そして筆者の1936年頃よりの研究によっても，この事実は，近似として，ゴムのみならず，木材等についても認められ，今日では，殆ど所謂弾性的と云われるすべての物質，金属，ゴム，プラスチックスの全般についてこの性質が近似的に認められるのである。

所でこの振動数に無関係な，楕円相似型弾性履歴をもつ材料の，弾性振動力学の問題は，勿論Kimballの頃より注目されたと考えられる。

その後これについて，本多光太郎の論文を否定し，併しKimball型内部摩擦がどんな形で振動力学の中に導入されるかは，現在の所全く不明であり，これは極めて基礎的で重大な問題であると指適したのは，1937年頃の英国の物理学誌Phylosophical Magazineであった。

このようにして，この問題は歴史的な問題として今日に到っている。

併しこの問題については1937年頃より，筆者は数年に互って発表し戦争で中断した。

ここでは近時機会を得て，別な角度より証明しても，同様な結果が得られたので，この所論を少し敷衍することにした。

そこで我々が現実に直面する弾性的材料は，金属であれ，ゴムであれ，有機材であれ，プラスチックスであっても，すべて近似的にはKimball型内部摩擦をもち，それを弾性履歴の側から見ると

〔振動数に無関係な相似楕円型弾性履歴〕

をもつことから，これを

楕円弾性 ＝ Elliptical Elasticity

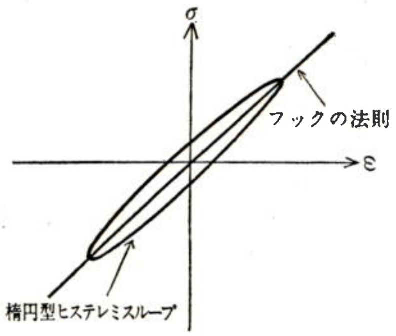
と称し，フックの法則に基く旧来のものを

直線弾性 ＝ Lenear Elasticity

と称することにする。

ここではこのような素材に対するElasticity Theoryの基礎について述べる。

1. 不完全弾性 — 楕円弾性論の基礎



才1図

古典弾性論は応力一歪線図に於て，フックの法則に基礎をおくものである。

これは力学の展開に於て第1次近似として，極めて重要な役割を果して来た。

そこでこれをより現実的に，物質に近接するために，ここに第2近似の弾性論を展開したい。

この第2近似の基礎的性質は，長い歴史的な実験的事実の集積より，新らしい物質定数一材料に内在する内部摩擦定数一を規定し得る現象が発見された。

これは金属材料のみならず，ゴム材料，更にプラスチックス材料に至る迄，非常に多くの所謂弾性的材料に，繰返し応力が作用したとき，或る振幅と振動数の間に於て，第1次近似として，この物質定数を定め得るものが多い。従ってこの定数の性質を，フックの法則に対する，第2近似としてその理論を展開する。

この第2近似としての性格は，これを定常型振動現象で 促えると， その応力一歪の 弾性 履歴現象で，そのループが楕円型であり，その形がループの大小に拘らず，常に一定の相似形をとるという事実である。又そのループがその繰返振動数には無関係で一定であるという事実である。

そこでこのループの長経と短経の比，離心率又はこれに準ずる量は，これを物質定数〔ξ〕として捉らえることが出来る。この弾性履歴をヒステレシスループという事がある。

ここではこの様な物質を改めて楕円弾性物質と呼ぶことにする。

そこで先づ我々は弾性論の第1基礎であるフックの法則に目をつける。これを式で表わすと，

$$\sigma \;=\; E\,\varepsilon \quad \longrightarrow \quad [\sigma,\ \varepsilon,\ E] \quad \cdots\cdots (1)$$

σ は応力であり，ε は歪であり，E は物質定数としての弾性率である。

そこで(1)を第1近似として，そしてこの上に第2近似として ξ なる定数を導入する。そうすると次の問題が発生する。

$$\Phi(\sigma,\ \varepsilon,\ E,\ \xi) = 0 \quad \longleftarrow \quad [\sigma,\ \varepsilon,\ E,\ \xi] \quad \cdots\cdots (2)$$

この Φ 函数はどんな形で表わされるだろうか。

これがここに於ける先づ第1の問題である。

そこでこれをそのヒステレスループで追跡すると次の形が得られる。

$$\sigma^2 - 2\sqrt{E^2 - \xi^2}\,\sigma\varepsilon + E^2\varepsilon^2 - \xi^2 r^2 = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで r はこのループの歪振幅である。

次にこの関係式を整理して一括すると，

1. 応力振幅 σ_m ＝ 最大応力 ＝ Erで与えられる …………………………………………… (4)

2. 残留応力 σ_ξ ＝ ξr で与えられる ………………………………………………………… (5)

ここで残留応力とは ε＝Oのときの σ の値でこれがrに比例する。

そうするとこの ξ は残留応力係数（又は定数）と云える値である。

所が一方この σ_ξ/r の比は前に述べた，ヒステレシスループの離心率に準ずる量と見做せるので，ここでは改めてこの ξ を材料に内在する新らしい物質定数，内部摩擦定数と呼ぶことにする。

3. 残留歪 ε_ξ を σ＝Oのときの残留歪とすると

$$\varepsilon_\xi = \frac{\xi}{E} r \quad \cdots\cdots (6)$$

残留歪係数（又は定数）$\varepsilon'_\xi = \frac{\xi}{E} = \frac{\varepsilon_\xi}{r} = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_m}$ ……………………………………… (7)

4. 振幅 r に対する応力を振幅応力σ_Pとすると，

$$\sigma_p = \sqrt{E^2 - \xi^2}\ r \quad \cdots\cdots (8)$$

故に振幅応力係数（又は定数）$\sigma'_p = \sqrt{E^2 - \xi^2}$ ………………………………… (9)

5. 応力振幅σ_mに対する歪を応力振幅歪ε_Qとすると

$$\varepsilon_Q = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{E}\right)^2}\ r \quad \cdots\cdots (10)$$

応力振幅歪係数（又は定数）$\varepsilon'_Q = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{E}\right)^2}$ …………………………………… (11)

所でこれから基礎方程式の発見に追跡するのであるが，先づ(3)式は，純粋にϕ（σ，ε，E，ξ）＝O ではない。即ち定常繰返応力下に於て，ϕ（σ，ε，E，ξ，r）＝Oである。

今このことで，材料をばねとした分銅（m）系の振動方程式を考えると，この r はこの運動方程式を解いて得られる解の振幅に対応する歪振幅である。

一方当然この様な基礎方程式はこのような r を含んではならず，又解は定常運動の解とは限らない。

そこで問題のポイントは

1. どうしてこの r を表面に出さないで基礎式を構成するか。
2. 運動の基礎方程式は質量を含む部分の慣性項と釣合わさなければならないので σ は一次式で表現しなければならない。所が(3)式は σ と ε についての二次式である。

我々はこの２つの問題を或る方法で解かなければ，その基礎方程式を発見することは出来ない。

そこで先づ我々は(3)式を解くと，

$$\sigma = \sqrt{E^2 - \xi^2}\,\varepsilon \mp \xi\sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \quad \cdots\cdots (12)$$

そこでこの ε と $\sqrt{r^2 - \varepsilon^2}$ の２つの変量が対応している所から，先づこの式を複素数式で表現してみることを試みる。

即ち歪 ε を先づ複素数で表わすことにして，ε をその実数部，ε_i を虚数部とし，その複素歪を改めて次のように定義する。

$$Z = \varepsilon + i\varepsilon_i \quad \cdots\cdots (13)$$

そこでこのZの絶対値を考えると，それは上式の r と対応することが出来る。このε_iはεと位相を直角だけ異にした量である。

$$|Z| = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_i{}^2} = r \quad \cdots\cdots (14)$$

そこで(12)式を書き直すと，このとき負号をとり

$$\sigma = \sqrt{E^2 - \xi^2}\,\varepsilon - \xi\varepsilon_i \quad \cdots\cdots (15)$$

そこで同様なことを応力σに就て考える。

σ を複素応力Ωの実数部，σ_1を虚数部とする。

$$\Omega = \sigma + i\sigma_1 \quad \cdots\cdots (16)$$

今このσ_iに対して，(13)式と同様に，σに対して位相を直角だけ変え，このとき正号をとり，

$$\sigma_i = \sqrt{E^2 - \xi^2}\,\varepsilon_i + \xi\varepsilon \quad \cdots\cdots (17)$$

そこでΩ/Zの比に就て研究する。

$$\frac{\Omega}{Z} = \frac{\sigma + i\sigma_i}{\varepsilon + i\varepsilon_i} = \frac{\sigma\varepsilon + \sigma_i\varepsilon_i}{\varepsilon^2 + \varepsilon_i{}^2} + i\frac{\sigma_i\varepsilon - \sigma\varepsilon_i}{\varepsilon^2 + \varepsilon_i{}^2}$$

$$= \sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi = K \quad \cdots\cdots (18)$$

ここで〔E，ξ〕だけから成る複素係数（又は定数）Kを得ることになったのである。

そこでこの係数を改めて複素弾性率と称すると次式が得られる。

$$\Omega = KZ \quad \cdots\cdots (19)$$

この式は古典弾性力学の基礎式(1)即ち

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma = E\varepsilon \text{ と全く同型であり} \cdots\cdots (20) \\ 〔\sigma,\ \varepsilon,\ E,\ \xi〕\text{ の要素だけから構成される。} \end{array}\right.$$

即ち問題のポイント

1. ポイント1のrを表面に含まない。
2. 複素表現ではあるが一次式の形をとる。

このようにして，若し我々の Elliptical Elasticity の問題が Lenear に取扱われるならば，我々は複素慣性力を考えて，その実数部等をとることによって，問題を解くことが出来ると考えられる。

たとえばこの様な素材をばね部とする分銅mの運動方程式は

$$m\ddot{Z} + KZ = O \quad \cdots\cdots (21)$$

$$m\ddot{Z} + (\sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi)\,Z = O \quad \cdots\cdots (22)$$

で与えられる。

又これは，弾性体の運動方程式

$$\rho\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = K + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad}\Delta + \mu\nabla^2 U$$

ρ：密度，U変位，t時間，K質量力，λ，μ＝ラミー定数，Δ体積膨脹率

えも転換は可能である。

そこでこれ迄のことをまとめてみると，次のような表に表わすことが出来よう。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = E\sigma \rightarrow [\sigma,\ \varepsilon,\ E] \searrow \\ \Omega = KZ \leftarrow [\Omega,\ Z,\ K] \swarrow\end{array}\right. [\sigma,\ \varepsilon,\ E,\ \overset{\text{導入}}{\xi}] \cdots\cdots \text{(23)}$$

$$\text{但し}\quad K = \sqrt{E^2 - \xi^2} + i\xi$$

このTransformationは１つのLenear Transformationである。今これを書きかえて，

$$\left.\begin{array}{lll}\Phi(\sigma,\ \varepsilon,\ E,\ \xi) = 0 & \rightarrow & \mathcal{L}(\Omega,\ Z,\ K) \\ \text{Elliptical} & \rightarrow & \text{Linearität} \\ \text{Real Type} & \rightarrow & \text{Complex Type}\end{array}\right\} \cdots\cdots \text{(24)}$$

このことはもともとLenear Elasticityがξなる内部摩擦導入によって，Elliptical Elasticityになったが，取扱いとして，Complex Treatmentをほどこすと，再びLenearityをとりもどし，古典弾性力学と非常に類似した取扱いが可能になったことを示すものである。

このことは次に様にも表現出来る。

Fooks Flasticty	Kimball Elasticity
= Lenear Elasticity	= Elliptical Elasticity
= Real Elasticity	= Complex Elasticity
= 古典完全弾性論	= ξ型不完全弾性論

最後にこれ等の量が工学と結びつく部分を説明すると次のようにも云うことが出来よう。近時機械工学は，又その一部である振動問題は，特にその多面なる角度より重視されるようになって来た。

そして，かかる内部抵抗は多かれ少かれ必ず総ての材料に内在する限り，独りかかる振動問題に於て，それを埒外におくことは許されなくなったと見られ得る。即ちかかる量は振動の減衰状態，共鳴発振の危険状態，更に翼フラッター，タービン翼その他構造物，機械的振動の不安定発振状態等では直接重要な量となる。又材料学的研究試験，疲労等の立場からも，重視されるようになって来た。猶，このような内部減衰の更に高度の複雑な現象は素材自身の内部構造の追窮に応用され始めているのである。

結　　論

ここでは完全弾性体論を手引きとして，不完全弾性体論の中でKimball型の内部摩擦をもつ弾性論の基礎について述べた。

この問題は古く1892年W. Voigtの理論が否定され，1926年Kimball型が発見されて以来歴史的な問題として今日に到っているものである。

ここに於ての所論は，Complex Numberの取扱いによって，それが始めて可能になった状況が見られる。

現実の現象はReal Numberのみで表現し尽されねばならないとする思想もあるが，筆者は必ずしも

これにこだわる必要はないものと考える。

即ち人間の思考頭脳に於て，生まれた純理論的構成が，現実の物理現象に対応したとき，それがRealの取扱いを越えて Imaginary の取扱いへふみ入ったとしても，それが現実の物理現象と結び付く結節点で，明確な論理性があれば差支えないものと考える。

ここでは丁度古典弾性論が線形であり，現実の現象は不幸にして線形ではなかったが，これがComplex Treatmentという思考手段によって再び線形を取り戻した興味ある１例のように思われる。大方の御叱正仰ぐ次第である。 (1969—April)

1) J. A. Ewing, Brit, Assoc. Rep., 188の, P.502
A. Ono; Proc. 3rd Intern. Congress for Applied Mechanics, Stockholm. 2. 1の30, p. 305.
日本学術振興会，金属材料Ⅰ，応力論，第3章54頁。
2) W. Voigt, Ann. d. phys, 47, 18の2, 671頁
3) K. Honda & S. Sakai, 東北理科報告, 10, 1の21. 1頁 Phil Mag, 92. 1の21. 397頁
4) A. L. Kimball & D. E. Lovell, Trans. Amer.Soc.Mech.Eng. (1926) .,
A. L. Kimball&D. E. Lovell. phys. Rev., 30 (1027)
5) O.Föppl, Zeits, V. D. I. 70, (1の26) , 1292頁
6) B. V. Schlippe, Ingenieur Archiev. Bd. 6. 1の35
Ph. Popp; Z. Techn. Phys. 1の34, Bd. 15.